АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

3927—4280

*

№ 7 **1954**

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

В. В. Алпатов, А. П. Лебедев, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников
Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), Б. Н. Рутовский,
Л. И. Седов, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии 1
Основания математики и математическая логика 2
Теория чисел 4
Алгебра 9
Многочлены и линейная алгебра 9
Группы 10
Поля, кольца и структуры 10
Топология 12
Теория функций действительного переменного 14
Теория множеств 14
Приближение функций полиномами и их обобщениями 15
Теория функций комплексного переменного 18
Дифференциальные уравнения 21
Обыкновенные дифференциальные уравнения 21
Уравнения в частных производных . . 26
Приложения к физике, технике и естественным наукам 29
Интегральные уравнения 39
Приложения интегральных уравнений . 41
Вариационное исчисление 43
Анализ (другие вопросы) 44
Числовые ряды 45
Специальные функции 45
Интегральные преобразования и операционное исчисление 45
Приложения общих методов математического анализа 48
Функциональный анализ 49
Теория вероятностей 50
Математическая статистика 52
Теория игр 54
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов в технике . . 54
Геометрия 55
Приложения геометрии 57
Проективная и начертательная геометрия 58
Алгебраическая геометрия 59
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 59
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 60
Метрические методы в геометрии . . . 63
Геометрия выпуклых многообразий . . 65
Численные и графические методы 66
Таблицы . . . . . —
Алгебра электрических цепей . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 73
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 85
Авторский указатель . . . . . I—IV

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийский пос., д. 42 Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 3927—4280 **№ 7** **Июль 1954 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

3927. К вопросу о развитии математики и механики в Узбекистане. Аржаных И. С., Изв. АН УзССР, 1953, № 6, 102—105

Сообщается о результатах по математическому анализу и механике, полученных в Институте математики и механики Академии наук Узбекской ССР, и обсуждается программа дальнейших работ.

3928. Заметки (1 июля — 31 декабря 1953 г.) (Notes. July 1 — December 31, 1953), Math. scand., 1953, 1, № 2, 320—328 (англ.)

Приводится, в частности, перечень докладов, прочитанных на Международной конференции по дифференциальной геометрии в Италии, на 8-м конгрессе польских математиков и на 12-м конгрессе скандинавских математиков.

3929. Международное математическое объединение. Камке (International Mathematical Union. Kamke), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1953, 56, № 2/3, ч. 2, 71—73 (нем.)

3930. Объединенный комитет Американской ассоциации содействия развитию науки по преподаванию естественных наук и математики. Уотсон (The AAAS cooperative committee on the teaching of science and mathematics. Watson Bernard B.), Science, 1953, 118, № 3070, 527—528 (англ.)

Сообщается об обществах, представленных в комитете, и о задачах комитета.

3931. Математические работы Адамара. Мандельбройт (The mathematical work of Jacques Hadamard. Mandelbrojt S.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 9, 599—604 (англ.)

Краткий обзор содержания работ Адамара.

3932 РЕЦ. Математика и жизнь. Бляшке (Mathematik und Leben. Blaschke W., 71 S., Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, 1952) [Рецензия: **Камке** (Kamke), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1953, 56, № 2/3, ч. 2, 41 (нем.)]

См. также: 3936, 3948 РЕЦ, 4257

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

3933. Из ранней истории алгебры. Квадратные уравнения у вавилонян. Раик А. Е., Уч. зап. Молотовского ун-та, 1953, 8, № 1, 31—63

Автор ставит своей задачей «исследовать новейшие данные по истории квадратных уравнений» и указывает, что «основным источником служат вавилонские математические тексты, изданные Нейгебауером в 1935 г.». Список литературы содержит 8 произведений, из которых последнее (по времени выхода) выпущено в 1938 г. Публикация вавилонских математических текстов, выпущенная Нейгебауером и Саксом в 1945 г. (на английском языке) не учтена. Единственной цитатой из произведений советских авторов является примечание С. Я. Лурье, переводчика книги Нейгебауера (Нейгебауер О., Лекции по истории античных математических наук, ОНТИ НКТП СССР, М.— Л., 1937, стр. 207—208).

В работе приведено много характерных задач как в дословном переводе так и в модернизованном виде. Методы, примененные вавилонскими авторами для решения задач, восстанавливаются на основе изучения последовательности операций над данными в задачах числами. Этот прием был использован М. Я. Выгодским (Успехи матем. наук, 1940, № 7, 102—153; № 8, 293—335), работа которого осталась неизвестной автору. Выводы автора в основном совпадают с выводами упомянутой работы. Именно в § 1 устанавливается, что значительная группа задач решалась вавилонскими авторами с помощью подстановок, приводящих данное уравнение или данную систему уравнений к канонической системе вида $x \pm y = a$; $xy = b$; в § 2 устанавливается, что применялось также правило для решения приведенных квадратных уравнений и что неприведенные уравнения сводились к приведенным;

в § 4 автор высказывается в пользу того, что решение задач на квадратные уравнения протекало чисто алгебраически, без применения геометрических средств.

В работе высказаны две новые точки зрения. По вопросу о том, знали ли вавилонские ученые, что квадратное уравнение может иметь два (действительных) корня, автор говорит:

«Этого не знать вавилонский математик, пожалуй, не мог, но, рассматривая квадратное уравнение как определяющее одно неизвестное, он сталкивался с явным для него противоречием. Поэтому вполне убедительна мысль С. А. Яновской о том, что во всех случаях, когда оба корня имели смысл, вавилонский математик предпочитал пользоваться не квадратным уравнением, а канонической системой $u + v = a$, $uv = b$, где u и v рассматриваются как два независимых неизвестных; определенность же достигается, например, тем, что «длина» не может быть меньше «ширины» (стр. 52).

Рассматривая вопрос о роли обратных задач в истории возникновения алгебры, автор отмечает что одна из задач с конкретным содержанием носит явно искусственный характер; «это наводит на мысль, что цель составления и решения таких «обратных» задач могла состоять уже в специальном изощрении математических методов и проверке их на практике, так как результат был заранее известен» (стр. 63). *М. Я. Выгодский*

3934. Правило двойного ложного положения. Бауи (The rule of double false. Bowie Harold E.), Math. Mag., 1953, 26, № 5, 269—271 (англ.)

Объяснение при помощи алгебры правила двойного ложного положения, широко применявшегося в средневековой арифметике. *И. Г. Башмакова*

3935. Происхождение радиана. Бергдал (Origin of radian. Bergdal Ed), Math. Mag., 1953, 27, № 1, 40 (англ.)

Обращение к читателям с просьбой сообщить сведения о том, когда и где было введено впервые понятие радиана.

3936. Десять лет Академии наук Узбекской ССР. Захидов Т. З., Изв. АНУзССР, 1953, № 6, 3—8

3937. Джованни Вакка. Кассина (Giovanni Vacca. Cassina Ugo), Arch. internat. histoire sci., 1953, 6, № 23—24, 300—305 (итал.)

Некролог итальянского историка математики и естественных наук, а также китаеведа Джованни Вакка (1872—1953). *А. П. Юшкевич*

3938. Андрей Андреевич Марков (К пятидесятилетию со дня рождения). Линник Ю. В., Шанин Н. А., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 1 (59), 145—149

Биография и обзор научных трудов А. А. Маркова.

3939. Константин Петрович Персидский (К пятидесятилетию со дня рождения). Жаутыков О. А., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 1 (59), 151—154

Обзор научных работ К. П. Персидского по теории дифференциальных уравнений.

3940. Жюль Хаг. Шевалье (Jules Haag. Chevalier Auguste), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 24, 1583—1584 (франц.)

Некролог французского математика и механика Жюля Хага.

3941. Шестьдесят лет со дня рождения академика Эдуарда Чеха. Новак, Вычихло, Зелинка (Šedesát let akademika Eduarda Čecha. Novák J., Vycichlo Fr., Zelinka R.), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 2, 185—194 (чеш.)

3942. Список научных работ академика Э. Чеха (Seznam vědeckých prací akademika E. Čecha), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 2, 195—198 (чеш).

См. также: 3927, 3932 **РЕЦ**

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

3943. О системе аксиом, не имеющей рекурсивно перечислимой арифметической модели. Мостовский (On a system of axioms which has no recursively enumerable arithmetic model. Mostowski A.), Fundam. math., 1953, 40, 56—61 (англ.)

В этой работе определяется место, которое модели элементарных теорий занимают в классификации Клина — Мостовского (Kleene S. C., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 53, 41—73; Eundam. math., 1946, 34, 81—112).

$\boldsymbol{P}_1$ означает класс (одно- или многомерных) рекурсивно перечислимых множеств, $\boldsymbol{Q}_1$ — класс дополнений множеств из класса $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ — класс проекций множеств, принадлежащих $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ — класс дополнений множеств, принадлежащих $\boldsymbol{P}_2$ и т. д. Клин доказал (Kleene S. C., Introduction to metamathematics, Groningen, 1953, 394), что каждая непротиворечивая и конечно-аксиоматизуемая элементарная теория имеет модель класса $\boldsymbol{P}_2 \cap \boldsymbol{Q}_2$ (т. е. модель, в которой каждый элементарный предикат принадлежит классу $\boldsymbol{P}_2 \cap \boldsymbol{Q}_2$). Оставался открытым вопрос, не может ли быть улучшена эта оценка класса моделей.

Автор частично решает эту проблему, построив пример теории, которая не имеет модели класса $\boldsymbol{P}_1$. Построенная автором теория является модификацией системы теории множеств, построенной на аксиоматике Бернайса (Bernays P., J. Symbolic Logic, 1937, 2, 65—77; 1941, 6, 1—17). Автор показывает, что если бы эта теория имела модель класса $\boldsymbol{P}_1$, то существовало бы полное и непротиворечивое расширение теории, множество номеров теорем которой также было бы рекурсивно перечислимым, что противоречит известной теореме Россера (Rosser J. B., J. Symbolic Logic, 1936, 1, 87—91). Во время печатания работы появилась статья Крейсела (Kreisel G., Actes du XI-me congrés internatio-

nal de philosophie, 1953, 39—49), в которой решается аналогичная проблема. *H. Rasiowa*

3944. Арифметика с производящими определениями по индукции. Майхилл (Arithmetic with creative definitions by induction. Myhill John), J. Symbolic Logic, 1953, 18, № 2, 115—118 (англ.)

Рассматривается дедуктивное исчисление для арифметики, построенное на базе узкого исчисления предикатов с аксиомами Пеано:

$$P1\cdot\ x' \neq 0\,,$$

$$P2\cdot\ x' = y' \supset x = y\,,$$

$$P3\cdot\ F0\bullet(x)(Fx \supset Fx') \supset Fy\,,$$

а также с аксиомами для μx («наименьшее число x такое, что»):

$$\mu 1\cdot\ Fx \supset F(\mu x)(Fx)\,,$$

$$\mu 2\cdot\ (x) \sim Fx \bullet \supset \bullet (\mu x)(Fx) = 0\,,$$

$$\mu 3\cdot\ Fy \supset \bullet (\mu x)(Fx) \leqslant y\,.$$

Вместо рекурсивных определений, допускаемых в обычном исчислении для арифметики, здесь приняты определения по схеме:

$$\text{RD.}\quad \begin{cases} \Phi(x_1, \ldots, x_n, 0) = F(x_1, \ldots, x_n)\,; \\ \Phi(x_1, \ldots, x_n, y') = G(x_1, \ldots, x_n, y)\,, \end{cases}$$

где F содержит лишь такие символы, которые ранее уже были определены, а G может содержать, кроме таковых, еще символ Φ, но только при условии, что его последний аргумент есть y; в F и G не входят свободные переменные, кроме явно выписанных в формулах RD.

Следуя Лесневскому, автор называет определение производящим (creative), если в результате его присоединения к системе становятся доказуемыми ранее невыводимые предложения, в которых определяемый символ не фигурирует. Схема RD является источником производящих определений; это вытекает из следующего основного результата статьи:

Пусть $K\alpha$ — исчисление, построенное на аксиомах P1 — P3, $\mu 1 - \mu 3$ и на конечном числе определений типа RD. Тогда дальнейшее применение (конечное число раз) схемы RD позволяет определить функцию истинности (truth-function) для $K\alpha$ и тем самым порождает исчисление $K\beta$, в котором доказуема непротиворечивость $K\alpha$.

Б. А. Трахтенброт

3945. О моделях аксиоматических систем. Мостовский (On models of axiomatic systems. Mostowski A.), Fundam. math., 1952, 39, 133—158 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Рассматриваются модели трех родов, которые можно охарактеризовать как классические (аналогичные тем, которые используются в классических доказательствах непротиворечивости, например, в геометрии), семантические (основанные на формализованном понятии истины, или «удовлетворяемости» (satisfaction), введенном Тарским) и «оценочные» (основанные на известном методе «оценок», арифметизированном по-гёделевски). Точные определения выглядят громоздко и даются, вообще говоря, не в формализме, подлежащем рассмотрению, а в его синтаксисе; для формулировки понятия модели второго рода достаточно аксиоматики теории множеств, принадлежащей Цермело. Конкретные модели первых двух, а иногда и третьего родов, строятся в самом формализме. Модели первого рода пригодны только для относительных доказательств непротиворечивости вида $N(S) \supset N(S)$, где S — система, средствами которой строится модель, а предикат $N(m)$ означает «система m непротиворечива».

Основная постановка проблемы: аксиоматизуема ли система S, содержащая бесконечно много аксиом, посредством некоторой своей конечной подсистемы s; в качестве S выбираются теория множеств Цермело, арифметика действительных чисел и арифметика натуральных чисел. Доказывается, что доказуемость в S наличия модели второго рода для системы s (конечной подсистемы S) эквивалентна доказуемости $N(s)$ в S для случая, когда S есть система аксиом Цермело для теории множеств (как известно, бесконечная). Отсюда при помощи классической теоремы Гёделя о недоказуемости непротиворечивости средствами самой системы получается результат о невозможности аксиоматизации системы S посредством конечного числа аксиом (если S непротиворечива). Средствами арифметизации аналогичные результаты получаются для арифметики действительных чисел; для арифметики натуральных чисел аналогичный результат получается при помощи моделей третьего рода. Отмечается, что перечисленные результаты, относящиеся к неаксиоматизуемости конечными подсистемами, не новы (для теории множеств см. Hao Wang, Math. Ann., 1952, 125, 56—66; для арифметики см. Рылл-Нардзевский, РЖМат, 1954, 3197). В конце работы приводится следующая теорема, доказанная Тарским:

Для каждой конечно-аксиоматизуемой подсистемы s_1 арифметики S натуральных чисел существует конечная подсистема s системы S, неинтерпретируемая в s_1. *А. С. Есенин-Вольпин*

3946. О понятиях полноты и интерпретации формальных систем. Крейсел. (On the concepts of completeness and interpretation of formal systems. Kreisel G.), Fundam. math., 1952, 39, 103—127 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Работа посвящена введенному автором понятию дизъюнктивной (конъюнктивной) интерпретации формальных систем $\mathfrak{F}$ в произвольной формальной системе F. О системе $\mathfrak{F}$ при этом предполагается очень мало: множество доказательств в $\mathfrak{F}$ не должно быть обязательно рекурсивно перечислимым. Понятие, о котором идет речь, является обобщением понятия модели. Определение его таково: мы говорим, что в F задана дизъюнктивная (конъюнктивная) интерпретация $\mathfrak{F}$, если каждому выражению $\mathfrak{A} \in \mathfrak{F}$ сопоставлена последовательность выражений $A_1, A_2, \ldots$ из F таким образом, что 1) если $\mathfrak{A}$ является теоремой в $\mathfrak{F}$, то существует n (для каждого n) такое, что A_n является теоремой в F; 2) если $\neg\mathfrak{A}$ является теоремой в $\mathfrak{F}$, то для каждого n (существует n такое, что) $\neg A_n$ является теоремой в F. Особенно важным является случай полной дизъюнктивной (конъюнктивной) интерпретации $\mathfrak{F}$, т. е. такой, что выражение $\mathfrak{A} \in \mathfrak{F}$ является теоремой тогда и только тогда, когда

для некоторого (каждого) n A_n является теоремой. Автор пишет: «Этот случай связан с рассмотрением полноты и аксиоматической характеристики понятий». Таким образом, получается обобщение понятий полноты (в смысле, принятом у Гёделя в доказательстве полноты узкого функционального исчисления) при условии, однако, что это понятие определено не для самой системы, а для ее интерпретации. Автор дает несколько примеров полных дизъюнктивных интерпретаций непротиворечивых расширений арифметики, а также строит полную конъюнктивную интерпретацию формализованной теории чисел, являющейся модифицированной системой Z_μ в системе, которая служит ω-непротиворечивым расширением Z_μ. (Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, II, Berlin, 1939, 324). В работе приводятся также теоремы общего характера, просто вытекающие из принятых определений.

Автор получает, кроме того, некоторое дополнение к результатам исследований в статье «On the interpretation of non finitist proofs» (J. Symbolic Logic, 1951, **16**, 241 — 267; 1952, **17**, 43 — 58), относящихся к финитным интерпретациям. Самым важным результатом является доказательство теоремы, что не существует дизъюнктивной интерпретации системы Z_μ (Hilbert D., Bernays P., цитированная выше книга) в формальной системе F, удовлетворяющей следующему условию: переменные системы F суть свободные индивидуальные переменные, предикаты разрешимы, а функции вычислимы; и, кроме того, из каждой формулы $A_n \in F$, сопоставленной выражению $\mathfrak{A} \in \mathfrak{F}$, можно вывести следующую при помощи правил узкого функционального исчисления. Аналогично, не существует конъюнктивной интерпретации системы Z_μ в F. При доказательстве этого утверждения автор устанавливает, что не существует интерпретации Эрбрана для системы Z_μ. *H. Rasiowa*

3947. Формальные системы и мышление. Каземир (Formal systems and mental activity. Kazemier B. H.), Synthese, 1953, 8, № 10, 480—489 (англ.)

Обзор развития символических исчислений («формальных систем», по терминологии автора) в математике. Автор отмечает следующие этапы: 1) символика в традиционном математическом языке и логическая символика Пеано; 2) исчисления Фреге и «Principia Mathematica»; 3) работы Гильберта и исследования по метаматематике; 4) работы Гёделя, Чёрча и других о неразрешимости в формальных системах; 5) семантические исследования Тарского. Исследования по семантике рассматриваются более подробно. В заключение дается общее обсуждение конструктивного и аксиоматического методов и применяемых в них дедуктивных средств.

Философские взгляды автора неприемлемы с точки зрения диалектического материализма. Автор не учитывает работ советских авторов по математической логике. *Г. Н. Поваров*

3948 РЕЦ. Очерки по формалистической философии математики. Керри (Outlines of a formalist philosophy of mathematics. Curry H. B., VII + 75 pp., North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1951, Fl. 7.50) [**Рецензия: Гудстейн** (Goodstein R. L.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 319, 78—80 (англ.)]

Не соглашаясь с основным тезисом книги Керри «Математика является наукой о формальных системах», Гудстейн в то же время считает эту книгу полезной как содержащую «анализ идеи формальной системы» и шаги, «предпринятые с целью освобождения математического формализма от всяких философских предубеждений относительно природы математики».

Примечание референта. С точки зрения диалектического материализма такое «освобождение» на деле невозможно; основной тезис книги уже ясно говорит о ее идеалистическом и метафизическом характере. *А. А. Зыков*

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

3949. О теореме Варинга — Зигеля. Эйуб (On the Waring — Siegel theorem. Ayoub R. G.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 4, 439—450 (англ.)

Пусть F — алгебраическое вполне вещественное поле степени n, D — дискриминант, а $\mathfrak{d}$ — дифферента поля F. Пусть $\varphi(\xi) = \alpha\xi^k + \alpha_1\xi^{k-1} + \ldots + \alpha_k$ — полином с целыми вполне положительными коэффициентами из F. Для числа представлений $A(\nu)$ целого вполне положительного числа $\nu \in F$ в виде $\nu = \varphi(\xi_1) + \ldots + \varphi(\xi_s)$ с целыми вполне положительными $\xi_j \in F$ при $s \geqslant n(2^k + n)$ доказывается асимптотическая формула

$$A(\nu) = D^{\frac{1}{2}(1-s)}\sigma_{\nu,k,s}\left(\frac{\Gamma^s(1+1/k)}{\Gamma(s/k)}\right)^n N(\alpha)^{-s/k} \times$$
$$\times N(\nu)^{-1+s/k} + o(N(\nu)^{-1+s/k}). \qquad (1)$$

Здесь $\sigma_{\nu,k,s}$ — особый ряд:

$$\sigma_{\nu,k,s} = \sum_{\gamma} G^s(\gamma)\exp[-2\pi i S(\nu\gamma)],$$

причем γ пробегает полную систему несравнимых по модулю $\mathfrak{d}^{-1}$ чисел из F;

$$G(\gamma) = N(\mathfrak{a})^{-1}\sum_{\mu \bmod \mathfrak{a}} \exp[2\pi i S(\varphi(\mu)\gamma)],$$

$\mathfrak{a}$ — знаменатель идеала $\mathfrak{bd}$, $\mathfrak{b} = (\alpha\gamma, \alpha_1\gamma, \ldots, \alpha_k\gamma)$.

Автор предполагает дать исследование особого ряда в другой работе. Формула (1) для случая $\varphi(\xi) = \xi^k$ при $s \geqslant kn(2^{k-1} + n) + 1$ была получена Зигелем (Siegel C. L., Amer. J. Math., 1944, 66, 122 — 136). Метод автора является аналогом из-

вестного метода Харди—Литлвуда для решения проблемы Варинга в поле рациональных чисел.

И. П. Кубилюс

3950. К теории асимптотической плотности. Рорбах, Фолькман (Zur Theorie der asymptotischen Dichte. Rohrbach Hans, Volkmann Bodo), J. reine und angew. Math., 1953, **192**, № 2, 102—112 (нем.)

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — множества неотрицательных целых чисел. $A(x)$ (соответственно $B(x)$) обозначают количество чисел в множестве $\mathfrak{A}$ (соответственно в $\mathfrak{B}$), не превосходящих x. $\Delta^*(\mathfrak{A})$ обозначает $\varliminf\limits_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}$. Под суммой $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ понимается множество, составленное из чисел $a+b$, где $a\in\mathfrak{A}$, $b\in\mathfrak{B}$. Остман (Ostmann H.-H., Dtsch. Math., 1941—1942, **6**, 213—247) доказал, что если

$$0\in\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B} \text{ и } \varliminf_{x\to\infty}\frac{A(x)+B(x)}{x}\leqslant 1, \text{ то}$$

$$\Delta^*(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\geqslant\frac{j}{j+1}\varliminf_{x\to\infty}\frac{A(x)+B(x)}{x},$$

где j — наименьшее целое, $x\geqslant 0$ такое, что $A(x)+B(x)<x$ (строгое неравенство). Позднее Остман (J. reine und angew. Math., 1949, **187**, 183—188) доказал более сильную теорему, формулировка которой слишком громоздка, чтобы ее здесь приводить. В настоящей работе авторы (пользуясь методом Остмана) дают более простое доказательство этой теоремы. В примечании к корректуре указывается, что Кнезер другим методом получил более сильный результат (РЖМат, 1954, 2849).

А. Г. Постников

3951. О распределении простых чисел в последовательностях вида $[f(n)]$. Пятецкий-Шапиро И. И., Матем. сб., 1953, **33** (75), № 3, 559—566

Пусть $1<c<12/11$, $\gamma=1/c$, $\pi_c(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x и имеющих вид $[n^c]$. Автор показывает, что

$$\pi_c(x)\sim x^{\gamma}(\ln x)^{-1},\quad x\to\infty.$$

Доказательство основано на оценке сверху модуля суммы

$$\sum\exp 2\pi ikp^{\gamma'},\quad \frac{2}{3}\leqslant\gamma'<1, \qquad (1)$$

где p пробегает простые в $[0{,}5N, N]$. Оценка суммы (1) осуществляется путем применения известного метода И. М. Виноградова в форме, предложенной Фогелсом.

Н. Г. Чудаков

3952. О коэффициентах Фурье абсолютного инварианта $J(\tau)$. Вейнгарден (On the coefficients of the modular invariant $J(\tau)$. Wijngaarden A. van), Koninkl. nederl. akad. wetensch. Proc., 1953, **A56**, № 4, 389—400; Indagationes math., 1953, **15**, № 4, 389—400 (англ.)

Пусть $J(\tau)$ — абсолютный инвариант теории модулярных функций;

$$12^3J(\tau)=\sum_{n=-1}^{\infty}c(n)\exp 2\pi in\tau.$$

В работе дана таблица коэффициентов $c(n)$ для всех значений от $n=-1$ до 100. Метод вычисления этих таблиц основан на получении ряда тождеств, связывающих $c(n)$ с функциями $\tau(n)$ (Рамануджан), $\sigma_m(n)=\sum\limits_{d/n}d^m$ и $p_d(n)$ (число представлений n как суммы натуральных слагаемых, подчиненных дополнительным условиям).

Н. Г. Чудаков

3953. Об оборванных разбиениях и обобщении эйлеровской функции $\varphi(n)$ и мёбиусовской функции. Никол (On restricted partitions and a generalization of the Euler φ number and the Moebius function. Nicol Charles A.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1953, **39**, № 9, 963—968 (англ.)

Приводятся без доказательства девять теорем относительно функции

$$\Phi(k,n)=\frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{(k,n)}\right)}\mu\left(\frac{n}{(k,n)}\right)=\sum_{(r,n)=1}\exp 2\pi ir\frac{k}{n}$$

и относительно коэффициентов $P_s(z)$ разложения в ряд производящей функции

$$F_{n-1}(z)=\prod_{s=1}^{n-1}(z-x^s),\quad \prod_{s=1}^{n-1}(z-x^s)=\sum_{s=0}^{n(n-1)/2}P_s(z)x^s$$

Связь обоих вопросов дается теоремой 5, утверждающей, что при $z\neq 1$ и натуральном t, $1\leqslant t\leqslant n$,

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}-\frac{t}{n}\right]}P_{kn+t}(z)=$$

$$=\frac{1}{n(z-1)}\sum_{d/n}(z^{\frac{n}{d}}-1)^d\Phi\left(t,\frac{n}{d}\right).$$

Большинство теорем работы могут быть доказаны несложными выкладками.

А. Г. Постников

3954. О взаимных расстояниях точек $n\xi$ на окружности. Хартман (Über die Abstände von Punkten $n\xi$ auf der Kreisperipherie. Hartman S.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, **25**, 110—114 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

На окружности длины 1 откладывается n раз подряд, отправляясь от начальной точки P_0, в одном и том же направлении некоторая иррациональная дуга ξ. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — концы откладываемых дуг, и пусть M_n и m_n соответственно означают наибольшее и наименьшее взаимное расстояние двух точек P_i $(1\leqslant i\leqslant n)$. Доказывается гипотеза Штейнгауза, согласно которой для почти всех ξ имеют место соотношения

$$\varliminf_{n\to\infty}nm_n=0,\quad \varlimsup_{n\to\infty}nm_n=\varliminf_{n\to\infty}nM_n=1,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}nM_n=\infty.$$

Более того, доказывается, что все четыре соотношения выполняются для всякого ξ, при разложении которого в цепную дробь множество получаемых неполных частных неограничено.

А. Я. Хинчин

3955. Об n-мерном равномерном распределении по модулю 1. Левек (On n-dimensional uniform distribution modulo 1. LeVeque W. J.), Michigan Math. J., 1952, **1**, № 2, 139—162 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Автор в предыдущей работе (Proc. Amer. Math. Soc., 1950, **1**, 380—383), используя одну лемму Каца, Салема и Зигмунда (Kac M., Salem R., Zygmund A., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **63**, 235—243) о системах квазиортогональных функций, получил метрическую теорему об оценках тригонометрических сумм

$$\sum_{k=1}^{N} \exp\{2\pi i\, \beta g_k(x)\},$$

где β — целое число, $\{g_k(x)\}$ $(k=1,2,\ldots)$ — последовательность вещественных функций, при некоторых довольно общих предположениях относительно $g_k(x)$. В реферируемой работе эти результаты обобщаются на многомерный случай. Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть $\{f_k(x_1)\}$ и $\{h_k(x_2,\ldots,x_n)\}$ $(k=1,2,\ldots)$ — две последовательности вещественных функций от вещественных аргументов, определенных в параллелепипеде $R: a_\nu \leqslant x_\nu \leqslant b_\nu$ $(\nu=1,\ldots,n)$ и обладающих свойствами:

a) существуют $f_k'(x_1)$ и $f_k''(x_1)$;

b) разности $f_j'(x_1)-f_k'(x_1)\neq 0$ и являются монотонными функциями;

c) $|f_j'(x_1)-f_k'(x_1)|\geqslant C|j-k|^{\varepsilon}$ при некоторых $C>0$ и $\varepsilon>0$ для всех j и k;

d) $\exp\{ih_k(x_2,\ldots,x_n)\}$ интегрируемы (L).

Тогда последовательность $\{f_k(x_1)+h_k(x_2,\ldots,x_n)\}$ равномерно распределена по модулю 1 для почти всех точек параллелепипеда R.

2. Пусть даны n последовательностей вещественных функций $\{f_{\nu k}(x_\nu)\}$ $(\nu=1,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots)$ от вещественных аргументов, определенных в параллелепипеде $R: a_\nu \leqslant x_\nu \leqslant b_\nu$ $(\nu=1,\ldots,n)$, причем функции каждой последовательности удовлетворяют условиям 1.*a*), 1.*b*) и условию 1.*c*) при $x_\nu=a_\nu$ и $x_\nu=b_\nu$.

Тогда при любом наборе целых чисел $\beta_1,\ldots,\beta_n$, не равных нулю, для почти всех точек параллелепипеда R

$$\sum_{k_1\leqslant N_1,\ldots,k_n\leqslant N_n} \exp\{2\pi i(\beta_1 f_{1k_1}(x_1)+\cdots+\beta_n f_{nk_n}(x_n))\} \ll$$

$$\ll \begin{cases} (N_1\ldots N_n)^{1-\delta} & \left(0<\delta<\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ при } \varepsilon<1, \\ (N_1\ldots N_n)^{\frac{1}{2}}(\log(N_1+1)\cdots\log(N_n+1))^{\frac{5}{2}+\vartheta} & (\vartheta>0) \text{ при } \varepsilon=1, \\ (N_1\ldots N_n)^{\frac{1}{2}}(\log(N_1+1)\cdots\log(N_n+1))^{\frac{3}{2}+\vartheta} & (\vartheta>0) \text{ при } \varepsilon>1. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, в силу обобщенного Корпутом критерия Вейля, следует, что n-кратная последовательность $\{f_{1k_1}(x_1),\ldots,f_{nk_n}(x_n)\}$ равномерно распределена по модулю 1 для почти всех $(x_1,\ldots,x_n)\in R$. Эти результаты обобщаются на случай n-кратных последовательностей систем из s функций от r переменных. Ввиду сложности формулировки теорему приводить не будем.

Доказываются еще 4 теоремы о квазиортогональных системах функций и сходимости почти повсюду некоторых рядов.

И. П. Кубилюс

3956. Об одном замкнутом множестве целых алгебраических чисел. Дюфренуа, Пизо (Sur un ensemble fermé d'entiers algébriques. Dufresnoy J., Pisot Ch.), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1953, **70**, № 2, 105—133 (франц.)

Статья содержит полное доказательство результатов, сформулированных в предыдущей статье авторов (РЖМат, 1953, 53).

И. П. Кубилюс

3957. О положительных определенных квадратичных формах. Ранкин (On positive definite quadratic forms. Rankin R. A.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 3, № 111, 309—314 (англ.)

Пусть γ_n — наибольший минимум для всех положительных квадратичных форм $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с вещественными коэффициентами и с определителем, равным единице.

Известны, например, следующие значения числовой функции γ_n:

$$\gamma_1=1,\quad \gamma_2=2\cdot 3^{-\frac{1}{2}},\quad \gamma_3=2^{\frac{1}{3}},\quad \gamma_4=2^{\frac{1}{2}},$$
$$\gamma_5=2^{\frac{3}{5}},\quad \gamma_6=2\cdot 3^{-\frac{1}{6}},\quad \gamma_7=2^{\frac{6}{7}},\quad \gamma_8=2. \qquad (1)$$

Пусть $M_r(f)$ — точная нижняя граница главных миноров r-го порядка $(r=1,2,\ldots,n-1)$ форм, эквивалентных какой-нибудь из f.

Строится новая числовая функция $\gamma_{n,r}$ — точная верхняя граница множества чисел $M_r(f)$, где f может быть любой из указанных выше форм f $(M_r(f)\leqslant\gamma_{n,r})$. Посредством геометрических соображений доказывается существование формы f, главный минор r-го порядка которой равен $\gamma_{n,r}$. Элементарно устанавливается свойство

$$\gamma_{n,r}=\gamma_{n,n-r} \qquad (2)$$

и доказывается основное неравенство: если $1\leqslant m<r\leqslant n-1$, то

$$\gamma_{n,m}\leqslant\gamma_{r,m}(\gamma_{n,r})^{\frac{m}{r}}, \qquad (3)$$

представляющее обобщение неравенства Морделла $\gamma_n \leqslant \gamma_{n-1}^{\frac{n-1}{n-2}}$ (Mordell L. J., J. London Math. Soc., 1944, **19**, 1—6).

При помощи некоторых результатов Коркина и Золотарёва (Korkine A., Zolotareff G., Math. Ann., 1873, **6**, 366—389) доказывается, что

$$\gamma_{4,2} = \frac{3}{2}. \qquad (4)$$

Так как $\gamma_{n1} = \gamma_n$, то на основании (3), (4), (1) и (2) получаются следующие результаты:

1) $\gamma_{5,2} = \gamma_{5,3} \leqslant 3 \cdot 2^{-7/10}$, 2) $\gamma_{6,2} = \gamma_{6,4} \leqslant \frac{9}{4}$,

3) $\gamma_{6,3} \leqslant 3^{9/10} \cdot 2^{-1/10}$, 4) $\gamma_{7,2} = \gamma_{7,5} \leqslant 2^{12/7} \cdot 3^{-1/6}$,

5) $\gamma_{7,3} = \gamma_{7,4} \leqslant 3^2 \cdot 2^{-10/7}$, 6) $\gamma_{8,2} = \gamma_{8,6} \leqslant 2^{12/7}$,

7) $\gamma_{8,3} = \gamma_{8,5} \leqslant 2^{17/7} \cdot 3^{-1/6}$, 8) $\gamma_{8,4} \leqslant 3^2 \cdot 2^{-6/7}$.

Замечены опечатки:
1) в неравенстве Морделла (стр. 311) вместо $\leqslant$ напечатано $=$; 2) на стр. 312 вместо $\frac{3}{2}(A_1A_2A_3A_4)^{\frac{1}{2}} =$ должно быть $\frac{3}{2}(A_1A_2A_3A_4)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$; 3) на стр. 313 вместо $\gamma_{3,2} = \gamma_{3,3} \leqslant 3 \cdot 2^{-\frac{7}{10}}$ должно быть $\gamma_{5,2} = \gamma_{5,3} \leqslant 3 \cdot 2^{-\frac{7}{10}}$

И. Г. Мельников

3958. О числе целых точек в многомерных шарах нечетной размерности. Турсманашвили А. П., Сообщ. АН ГрузССР, 1953, **14**, № 9, 513—520

Для действительного $x > 1$ пусть $A_k(x)$ обозначает число целых точек в k-мерном шаре $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2 \leqslant x$, $V_k(x)$ — объем данного шара и $P_k(x) = A_k(x) - V_k(x)$.

Далее, пусть для натурального s и действительного z

$$\varphi_s(z) = \frac{(-1)^s}{s!\,\Gamma\left(k - s + \frac{3}{2}\right)} \overline{B}_s(z)$$

($\overline{B}_s(z)$ — функция с периодом 1, в интервале $0 \leqslant z < 1$ совпадающая с s-м полиномом Бернулли $B_s(z)$);

$$\vartheta_s(z, l) = \sum_{h=1}^{l} \varphi_s\left(\frac{z - h^2}{l}\right);$$

$$G_s(z, l) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}+1}\{2\vartheta_s(z, 2l) - 2^s\vartheta_s(z, 4l)\} \\ \qquad \text{при четном } k, \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}} 2^{3-s}\{\vartheta_s(z, l) - 2^{s-2}\vartheta_s(z, 2l) - \\ -2^{2s-3}\vartheta_s(z - l, 4l)\} \text{ при нечетном } k. \end{cases}$$

Для шаров нечетной размерности автор доказывает асимптотическую формулу

$$P_{2k+1}(x) = \pi^{k+\frac{1}{2}}\{Z(k)\}^{-1}\sum_{s=1}^{m}\Phi_{k,s}(x)\,x^{k-s+\frac{1}{2}} + O(x^{k-m}),$$

где $k \geqslant 4$, m — натуральное число, удовлетворяющее условию $k \geqslant 2(m+1)$.

$$Z(k) = \begin{cases} (1-2^{-k})\sum_{l=1}^{\infty} l^{-k} \text{ при четном } k, \\ \sum_{\substack{l=1 \\ l \equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \left(\frac{-1}{l}\right) l^{-k} \text{ при нечетном } k, \end{cases}$$

$$\Phi_{k,s}(x) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \left(\frac{-1}{l}\right)^k l^{s-k-1}\vartheta_s(x, l) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(2l)^{s-k-1} G_s(x, l).$$

Аналогичные, но более простые, асимптотические формулы для шаров четной размерности получены ранее (Вальфиш А. З., Тр. Тбилисского мат. ин-та АН ГрузССР, 1947, **15**, 275—296; 1948, **16**, 215—230; 1949, **17**, 245—258; 1949, **17**, 259—279; Лурсманашвили А. П., РЖМат, 1954, 3210).

Г. А. Ломадзе

3959. Двойная укладка сфер. Ф ь ю (The double packing of spheres. F e w L.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 3, № 111, 297—304 (англ.)

Говорят, что система сфер в пространстве n измерений образует укладку, если ни одна из точек пространства не лежит более чем в одной сфере. Рассматриваются лишь одинаковые сферы радиуса 1. Тогда укладка таких сфер определяется совокупностью S их центров. Пусть $N_t(S)$ — количество точек S в кубе $|x_1| \leqslant t, \ldots, |x_n| \leqslant t$. Плотность δ плотнейшей укладки сфер определяется как

$$\delta = \sup_S \overline{\lim_{t\to\infty}} J_n N_t(S)\,(2t)^{-n}, \qquad (1)$$

где J_n — объем n-мерной единичной сферы. Известны (Minkowski H., Gesammelte Abhandlungen, II, 1912, 53—100; Blichfeldt, Trans. Amer. Math. Soc., 1914, **15**, 227—235) следующие оценки для δ:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \delta \leqslant (n+2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2}, \qquad (2)$$

откуда

$$\frac{1}{2} + o(1) \leqslant \delta^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} + o(1), \quad n \to \infty. \qquad (2')$$

В реферируемой статье даются аналогичные оценки для плотности δ_2 плотнейшей двойной укладки сфер радиуса 1. Говорят, что система сфер образует двойную укладку, если ни одна из точек n-мерного пространства не лежит более чем в двух

сферах. Пусть S_2 — совокупность их центров. Плотность δ_2 определяется как

$$\delta_2 = \sup_{S_2} \overline{\lim_{t\to\infty}} J_n N_t(S_2)\ (2t)^{-n}. \qquad (3)$$

Доказываются оценки:

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n < \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^n \delta \leqslant \delta_2 \leqslant (n+2)\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^n, \qquad (4)$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + o(1) \leqslant \delta_2^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{3} + o(1), n\to\infty. \qquad (4')$$

Для доказательства оценки сверху автор использует метод Блихфельда (см. предыдущую ссылку), для применения которого здесь необходимы некоторые предварительные соображения. Оценка сверху легко вытекает из того, что всякую простую укладку сфер радиуса 1 можно сопоставить с двойной укладкой сфер радиуса $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

А. В. Малышев

3960. Некоторые уравнения $y^2 = x^3 - k$ без целых решений. Холл (Some equations $y^2 = x^3 - k$ without integer solutions. Hall Marshall, Jr), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 3, № 111, 379—383 (англ.)

Отсутствие целых решений у неопределенного уравнения

$$x^3 - y^2 = k \qquad (1)$$

при некоторых значениях k устанавливалось до настоящего времени двумя методами: 1) посредством разложения на множители в поле $K(\sqrt{-k})$, $k>0$, если $h(\sqrt{-k}) \not\equiv 0 \pmod 3$, и 2) для $k = a^3 - mb^2$ применением квадратичного закона взаимности к уравнению (1) в форме

$$(x-a)(x^2+ax+a^2) = y^2 - mb^2.$$

В статье приводятся два других метода. В первом применяется разложение на множители в $K(\sqrt{-k})$ для некоторых значений k, когда $h(\sqrt{-k}) \equiv 0 \pmod 3$.

Так, например, для $k = 31$ $[h(\sqrt{-31}) = 3]$ доказывается, что уравнение (1) не имеет целых решений. К такому же заключению приводит первый метод и в случае $k = 92$ $[h(\sqrt{-23}) = 3]$.

Во втором методе отсутствие целых решений уравнения (1) для некоторых $k = 3a^2 + rb^3$ устанавливается при помощи кубического закона взаимности, прилагаемого к уравнению (1) в форме

$$x^3 - rb^3 = y^2 + 3a^2.$$

Применяя этот метод, автор устанавливает отсутствие целых решений у уравнения (1) при $k = 24$, $k = 77$ и $k = -60$. *И. Г. Мельников*

3961. Заметка о простых числах Мерсенна. Холл (A remark on the primeness of Mersenne numbers. Hall James S.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 3, № 111, 285—287 (англ.)

Простые числа вида $2^p - 1$ называются числами Мерсенна. Количество их определяет количество четных совершенных чисел (суммы делителей которых равны соответственно удвоенным величинам самих чисел).

Вычисления чисел Мерсенна производятся по методу, имеющему начало в работе Лукà (Lucas E., Amer. J. Math., 1878, 1, 289—321). В статье даются преобразования, позволяющие несколько облегчить вычислительный процесс чисел Мерсенна, производимый при помощи метода Лукà.

П. Н. Реморов

3962. Доказана ли большая теорема Ферма? Буане (Le grand théorème de Fermat est-il démontré? Boinet J.), Mach.-outil franç., 1953, 18, № 83, 117—119 (франц.)

Сообщение о том, что 26 сентября 1953 г., в зале Общества инженеров-профессионалов (Франция) Фо (Denis Fau) изложил доказательство большой теоремы Ферма. Доказательство содержит очевидную ошибку.

В статье дальше сообщается: «Мы должны, кроме того, отметить, что господин Фо так же хорошо осуществил доказательство теоремы Гольдбаха как и теоремы Ферма». *П. Н. Реморов*

3963. Символические методы в задаче о трехстрочных латинских прямоугольниках. Ямамото (Symbolic methods in the problem of three-line latin rectangles. Yamamoto Koichi), J. Math. Soc. Japan., 1953, 5, № 1, 13—23 (англ.)

Пусть $f(3, n)$ — количество трехстрочных латинских прямоугольников. В прежних работах (Сугану, 1949, 2, 153—162; J. Math. Soc. Japan, 1950, 1, 226—241) автор получил асимптотическую формулу для вычисления $f(3, n)$:

$$f(3, n) \sim e^{-3}(n!)^3 \sum_{i=0}^{n} H_i\left(-\frac{1}{2}\right) \Big/ i!\,(n)_i,$$

где $(n)_i = n!/(n-i)!$, а $H_i(x)$ — полином Эрмита.

В реферируемой работе эта формула выводится иным символическим методом. Также выводится рекуррентная формула для вычисления $f(3, n)$, полученная ранее Риорданом,

$$\Phi_n = \Phi_{n-1} + \frac{1}{(n)_2}\Phi_{n-2} + \frac{2}{(n)_3}\Phi_{n-3} + \eta_n,$$

где

$$\Phi_n = \frac{f(3, n)}{(n!)^3},\ \Phi_0 = 1,\ \Phi_1 = \Phi_2 = 0,$$

$$\eta_n = (-1)^n 3 \sum_{u=0}^{n} \frac{(-2)^u}{u!n!} - \frac{2^{n+1}}{(n!)^2}.$$

Основой для получения этих формул служит выведенная в статье символическая формула для вычисления $f(3, n)$. *В. Д. Поёсыпанин*

АЛГЕБРА

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

3964. Критические точки некоторых многочленов. Чеймберлин, Вулф (The critical points of certain polynomials. Chamberlin Eliot, Wolfe James), Duke Math. J., 1953, 20, № 1, 71—76 (англ.)

Критической точкой многочлена $p(x)$ называется корень его производной $p'(x)$. Если $p'(x_0) = p(x_0) = 0$, то критическая точка x_0 называется тривиальной. Рассматривается класс $P(n, k)$ многочленов вида

$$p(x) = (1 + x^2)^k (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-2k}),$$

где все a_s вещественны (но необязательно различны). Отрезок $[p, q]$ вещественной оси называется «выжимающим» для класса $P(n, k)$, если всякий многочлен этого класса, все вещественные корни которого содержатся в $[p, q]$, обязательно имеет нетривиальные невещественные критические точки. В работе даются необходимые и достаточные условия того, чтобы заданный отрезок $[p, q]$ был выжимающим для класса $P(n, k)$. Они имеют вид некоторых сложных неравенств, связывающих p и q с n и k. В частности, если $k(n-2k-1) \leqslant 4n$, то отрезок $\left[0, \frac{1}{k}\sqrt{n(n-2k)}\right]$ является наименьшим невыжимающим среди отрезков вида $[0, q]$ $(q > 0)$. *И. П. Натансон*

3965. Исследования по топологической линейной алгебре. Кирххоff (Beiträge zur topologischen linearen Algebra. Kirchhoff A.), Compositio math., 1953, 11, № 1, 1—36 (нем.)

Как известно, линейные преобразования A и B называются подобными, если существует невырожденное преобразование T, для которого $A = T^{-1}BT$. Автор называет A и B положительно подобными, если можно выбрать T не изменяющим ориентации пространства. Каждый класс подобных преобразований либо совпадает с классом положительно подобных преобразований, либо распадается на два таких класса. В первом случае соответствующие преобразования называются двусторонними, во втором — односторонними. Односторонние преобразования не перестановочны ни с каким изменяющим ориентацию преобразованием. Взаимно дополнительные инвариантные подпространства односторонних преобразований имеют четные размерности (в нечетномерных пространствах все преобразования двусторонни). Каждому одностороннему преобразованию A соответствует ориентация пространства R_n, получаемая разложением R_n на циклические подпространства, выбором в каждом из них любого вектора x_k и заданием цепочки векторов

$$x_1, Ax_1, \ldots, A^{l_1}x_1; x_2, Ax_2, \ldots; x_r, \ldots, A^{l_r}x_r.$$

Эта ориентация не зависит ни от выбора циклических подпространств, ни от выбора векторов x_k и поэтому характеризует A. Преобразование, не имеющее действительных собственных векторов, называется I-преобразованием. Такие преобразования рассматривались в работе Хопфа (Hopf H., Courant Anniversary Volume, 1948, 167—185) по исследованию комплексных структур в касательных пространствах к многообразиям. Если $I^2 = -E$ (E — единичное преобразование), то I называется специальным I-отображением. Каждому I-отображению в R_n сопоставляется специальное отображение $\rho_n(I)$; при этом $I = \rho_n(I)$, если I — специальное I-отображение, I и $\rho_n(I)$ определяют одинаковую ориентацию в R_n, подобным I-отображениям соответствуют подобные $\rho_n(I)$, I и $\rho_n(I)$ перестановочны. Так как каждое невырожденное преобразование евклидова пространства имеет вид $A = GP$, где G — ортогональное преобразование, а P — положительно определенное симметрическое преобразование, причем G и P однозначно определены, то можно определить функцию $G = \chi_n(A)$. χ_n отображает специальные I-отображения на кососимметрические ортогональные преобразования, также являющиеся I-отображениями. Два подобных I-отображения A и B положительно подобны тогда и только тогда, когда соответствующие пфаффовы формы для $\chi_n\rho_n(A)$ и $\chi_n\rho_n(B)$ имеют одинаковые знаки. Если рассматривать отображения как точки n^2-мерного топологического пространства с естественной топологией, то совокупность I_n всех I-отображений образует открытое множество, являющееся открытым ядром множества односторонних преобразований. Класс подобных односторонних преобразований состоит из двух компонент, а двусторонних преобразований — из одной компоненты. В зависимости от ориентации I_n распадается на два открытых подмножества I_n^+ и I_n^-. $\rho_n(I_n^+)$ является деформационным ретрактом для I_n^-, I_n^+ связно. Множество $\chi_n\rho_n(I_n^+)$ является деформационным ретрактом для I_n^+. Оно является замкнутым многообразием размерности $n(n-1)/4$ и расслаивается на многообразия $\chi_n\rho_n(I_{n-2}^+)$ с $(n-2)$-мерной сферой как базисным пространством. Если M_n — дифференцируемое многообразие, то можно определить непрерывные семейства преобразований в касательных пространствах этого многообразия. Если многообразие M_n комплексно, то существуют непрерывные семейства специальных I-отображений (получаемые в каждом касательном пространстве умножением всех векторов на i). Многообразие называется I-многообразием, если оно ориентируемо и дифференцируемо и если существует такое непрерывное семейство I-отображений, что индуцированная ими ориентация совпадает с исходной. Если эти отображения можно выбрать специальными, то M_n называется почти комплексным. Всякое I-многообразие почти комплексно. Исследованы условия, при которых сферы могут быть почти комплексными многообразиями. *Н. Я. Виленкин*

3966. О полном дифференцировании по регулярной квадратичной форме в алгебре с внешним умножением степени $2n$. **Вивье** (Sur la dérivation totale par rapport à une forme quadratique régulière dans l'algèbre extérieure de degré $2n$. Vivier Marcel), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 9, 879—881 (франц.)

Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — образующие элементы алгебры с внешним умножением над полем K. α-производная $\partial a/\partial\alpha$ для одночленов a определяется так: если a делится на α, то $\partial a/\partial\alpha = a/\alpha$, в противном случае $\partial a/\partial\alpha = 0$. Для любого элемента $F = \sum_i \lambda_j a_i$ $(\lambda_j \in K)$ производной $\partial F/\partial\alpha$ называется $\sum_i \lambda_i \frac{\partial a_i}{\partial\alpha}$. Далее, в случае четного $m = 2n$ вводится следующее определение полной производной по регулярной квадратичной форме $\Delta = \sum_{i,j} p_{ij} X_i X_j$:

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta} = \sum_{i,j} p^{ij} \frac{\partial F}{\partial X_j X_i},$$

где (p^{ij}) — матрица, обратная к (p_{ij}). При помощи этих понятий для формы F_p степени p доказывается:

1. Пусть P — форма четной степени, причем $P^h \neq 0$, $h > p$. Тогда из $PF_p = 0$ следует $F_p = 0$.

2. Если $m = 2n$ и Δ — регулярная квадратичная форма, то при $p + x \leqslant n$ из $\Delta^x F_p = 0$ следует $F_p = 0$.

3. Если $m = 2n$ и $p > n$, то F_p делится на Δ. В случае делимости для F/Δ приводится явная формула.

В. Б. Демьянов

3967. О структуре форм с внешним умножением. **Вивье** (Sur la structure des formes à multiplication extérieure. Vivier Marcel), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 18, 1725—1727 (франц.)

Рассматриваются внешние формы от $2n$ базисных элементов $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ над коммутативным полем K. Вводится обозначение $\omega_i = X_i Y_i$. Пусть H — форма степени p. Если каждый одночлен из H содержит точно k множителей ω_i, то говорят, что $H \in \Omega^n_{k,\,p-2k}$. Доказывается, что для любой формы F степени p существует однозначное разложение вида $F = \sum_{i\ 0}^{s} H_i$, где $H_i \in \Omega^n_{i,\,p-2i}$, $s = \left[\frac{p}{2}\right]$.

Через $d^x H/d\Delta^x$ обозначается x-я производная формы H по квадратичной форме $\Delta = \sum_{i\ -1}^{n} \omega_i$ (см. реф. 3966). Исследуется вопрос, когда для $H \in \Omega^n_{k,p-2k}$ имеет место $dH/d\Delta = 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы H была суммой членов вида $(\omega_{i_1} - \omega_{j_1}) \ldots (\omega_{i_k} - \omega_{j_k})\pi$, где все индексы $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k$ различны между собой, а $\pi \in \Omega^{n-2k}_{0,\,p-2k}$, причем в π фигурируют только X_i, Y_j с индексами, отличными от $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k$.

Далее для произвольного числа m базисных элементов вводится понятие корреляции (cor). Пусть $F = \sum_i \lambda_i [b_i]$ — форма степени p, где $[b_i]$ — одночлены степени p, $\lambda_i \in K$. Через $[b_i']$ обозначается одночлен, дополняющий $[b_i]$ до произведения всех базисных элементов. Тогда корреляция формы F определяется следующим образом: $\operatorname{cor} F = \sum_i \lambda_i [b_i']$. Формула $\operatorname{cor} A \cdot \operatorname{cor} B = \operatorname{cor} Z$ ставит в соответствие каждым двум формам A, B однозначно определенную форму Z, для которой вводится обозначение $Z = A/B$. При $m = 2n$ для любой формы F имеет место

$$\frac{(n-x)!}{x!} \frac{d^x F}{d\Delta^x} = F/\Delta^{n-x}.$$

В. Б. Демьянов

3968 РЖМ. Квадратичные формы и ортогональные группы. Эйхлер (Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Eichler Martin, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band LXIII, XII + 220 S., Springer-Verlag, 1952, 27.60 DM) [**Рецензия: Маасс** (Maass Hans), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1953, **56**, № 2/3, ч. 2, 56—57 (нем.)]

ГРУППЫ

3969. Линейные конечномерные представления групп Ли с коммутативным радикалом. Березин Ф. А., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 5, 759—761

На основании вытекающего из теоремы Леви факта, что каждая неразложимая в прямую сумму группа с коммутативным радикалом (к. р.) описывается полупростой группой K и ее представлением Г, в работе дается метод для получения всех представлений групп с к. р. Каждое представление φ группы K сопоставляется с представлением $\Gamma_{m\varphi}$ группы с к. р. в пространстве всех вектор-многочленов степени $\leqslant m$ и доказывается, что каждое представление группы с к. р. степени m содержится в $\Gamma_{m\varphi}$, но не содержится в $\Gamma_{(m-1)\varphi}$. Для выделения искомых представлений, вводятся понятия канонического и моногенного представлений. Задача сводится к перечислению моногенных представлений 1-й и 2-й степени. *А. В. Сульдин*

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

3970. Об алгебраической производной. Микусинский (Sur la dérivée algébrique. Mikusiński Jan), Fundam. math., 1953, **40**, 99—105 (франц.)

Дифференцированием в коммутативном кольце называется соответствие $a \to a'$, удовлетворяющее условиям $(a+b)' = a' + b'$ и $(ab)' = a'b + ab'$. Элемент c называется постоянным, если $c' = 0$. Элементы $a_1, \ldots, a_n$ называются линейно независимыми если для постоянных $c_1, \ldots, c_n$ из равенства

$c_1a_1 + \ldots + c_na_n = 0$ вытекает $c_1 = \ldots = c_n = 0$; в противном случае — линейно зависимыми. Условие (γ) гласит: если $a'b - ab' = 0$, то a и b линейно зависимы.

Основные результаты работы: 1) если кольцо не имеет делителей нуля и если дифференцирование удовлетворяет (γ), то элементы $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда определитель Вронского из них обращается в нуль; 2) при тех же предположениях о кольце и дифференцировании уравнение $a_n x^{(n)} + \ldots + a_1x' + a_0x = 0$ имеет не более n линейно независимых решений; 3) пусть A^* означает поле отношений кольца A, не содержащего делителей нуля, C^* — поле отношений подкольца C постоянных элементов кольца A, пусть дифференцирование в A^* определяется формулой $\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$; тогда множество C^* совпадает с множеством постоянных элементов тела A^* в том и только в том случае, если A удовлетворяет условию (γ).

Кроме примера обычного дифференцирования функций, автор дает другие примеры таких операций в кольцах, которые подпадают под вышеуказанную схему, и среди них «дифференцирование» $\{f(t)\}' = \{tf(t)\}$ в кольце F комплексных функций переменного $t \geqslant 0$ с обычным сложением и умножением, определенным по формуле: $\{f(t)\} \times \{g(t)\} = \left\{\int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau\right\}$. Символ $\{f(t)\}$ означает здесь функцию, в отличие от символа $f(t)$, означающего значение функции. Множество постоянных элементов тела F^* оказывается изоморфным телу комплексных чисел. В кольце F действует построенное автором исчисление операторов (ср. работу автора, Studia math. 1950, **11**, 41—70), благодаря чему к нему применимы результаты этой работы. *S. Hartman*

3971. Произведение абстрактных алгебр. Сикорский (Products of abstract algebras. Sikorski Roman), Fundam. math., 1952, **39**, 211—228 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Автор обобщает известные из современной алгебры понятия свободного произведения групп, колец, алгебр Буля и т. д. на произвольные классы алгебр, пользуясь для этой цели так называемым свойством расширений гомоморфизмов.

Если дан класс подобных алгебр $\mathfrak{A}$ и семейство $\{A_t\}_{t\in T}$ алгебр из $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$-произведением (лучше было бы добавить свободным) алгебр этого семейства автор называет такую алгебру $B \in \mathfrak{A}$: 1) которая при каждом $t \in T$ обладает подалгеброй B_t, изморфной алгебре A_t, 2) которая порождается (теоретико-множественной) суммой всех B_t и 3) что для каждого семейства гомоморфизмов $\{h_t\}_{t\in T}$ таких, что каждое h_t отображает B_t в алгебру $C \in \mathfrak{A}$, существует общее продолжение гомоморфизмов h_t до гомоморфизма, отображающего все B в C.

Исследуется связь этого произведения алгебр со свободными алгебрами и вопросом о существовании $\mathfrak{A}$-произведений для данных классов $\mathfrak{A}$. В частности, доказывается, что если класс $\mathfrak{A}$ замкнут относительно взятия подалгебр, фактор-алгебр и образования прямых произведений произвольной мощности и если, кроме того, каждая алгебра A_t содержит одноэлементную подалгебру, то существует $\mathfrak{A}$-произведение семейства $\{A_t\}_{t\in T}$.

Далее понятие $\mathfrak{A}$-произведения обобщается до понятия $(\mathfrak{A},\Phi)$-произведения путем замены в определении гомоморфизма на функцию, принадлежащую Φ (о классе Φ делаются некоторые довольно естественные предположения).

Приводятся примеры приложений понятия $\mathfrak{A}$-произведения и $(\mathfrak{A}, \Phi)$-произведения к группам, абелевым группам, кольцам, коммутативным кольцам, структурам, дистрибутивным структурам, телам множеств, алгебрам Буля различных типов, топологическим пространствам. *J. Loś*

3972. О внешних алгебрах и алгебрах Клиффорда как скрещенных произведениях и о понятии симплициального комплекса. Риге (Sur les algèbres extérieures et les algèbres de Clifford en tant que produits croisés et sur la notion de complexe simplicial. Riguet Jacques), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 13, 638—639 (франц.)

Пусть E — атомная обобщенная алгебра Буля (т. е. атомная дистрибутивная структура с относительными дополнениями). Симметрической разностью $x \oplus y$ двух элементов x и y алгебры E называется элемент $x'y + xy'$, где x' и y' есть дополнения в $x + y$ элементов x и y соответственно. Пусть K — произвольное поле характеристики, не равной двум. Обозначим через $P(K)$ модуль всех функций $u(x)$, определенных в алгебре E, значения которых принадлежат полю K, и отличных от нуля только для конечного числа значений аргумента. Введем в этот модуль операцию умножения $u_\gamma v$, называемую γ-сверткой, положив

$$u_\gamma v(x) = \sum_{y \oplus z = x} \gamma(y, z)\, u(y)\, v(z),$$

где $\gamma(y, z)$ — некоторая функция от двух переменных, значения которой принадлежат полю K. Это умножение ассоциативно тогда и только тогда, когда $\gamma(x, y)\gamma(x \oplus y, z) = \gamma(x, y \oplus z)\gamma(y, z)$ для любых $x, y, z \in E$. Функция γ, удовлетворяющая этому соотношению, называется системой факторов. Функция γ, для которой $\gamma(x \oplus y, z \oplus t) = \gamma(x, z)\gamma(x, t)\gamma(y, z)\gamma(y, t)$ при любых $x, y, z, t \in E$, называется мультипликативной. Любая мультипликативная функция является системой факторов.

Свертка, определяемая мультипликативной функцией γ, для которой $\gamma(0, 0) = 1$, $\gamma(x, x) = -1$, если $x \neq 0$, называется умножением Клиффорда, а модуль $P(K)$, снабженный этим умножением, называется алгеброй Клиффорда над E.

Свертка, определяемая системой факторов γ, для которой $\gamma(x, y) = \pm 1$, если $xy = 0$, $\gamma(x, y) = 0$, если $xy \neq 0$, $\gamma(x, y) = (-1)^{d(x)d(y)}\gamma(y, x)$, где $d(x)$ есть длина максимальной цепи, связывающей элемент x с нулем,

называется умножением Грассмана и обозначается знаком $\wedge$, а модуль $P(K)$, снабженный этим умножением, называется внешней алгеброй над E. Если алгебра E конечна, то получаются классические алгебры Клиффорда и Грассмана.

Утверждается, что если алгебра E обладает единицей, то понятие системы факторов Грассмана эквивалентно понятию симплициального комплекса, определенного с помощью матриц инциденций. Референту не удалось полностью разобрать соответствующих рассуждений автора и он считает, что в статье имеются опечатки.

В заключение автор утверждает, что изложенные конструкции можно перенести на случай, когда E есть p-кольцо в смысле Монтгомери и Маккоя. *М. М. Постников*

См также: 3933, 3977, 3989, 4017, 4090, 4169, 4191, 4195

ТОПОЛОГИЯ

3973. О некотором отображении двумерной сферы на себя. Борсук (On certain mapping of the 2-sphere onto itself. Borsuk K.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 268—272 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Известная теорема Эйленберга (Eilenberg S., Fundam. math., 1936, **26**, 68) утверждает, что отображение f метрического пространства R со счетной базой в окружность S_1 тогда и только тогда несущественно, когда $f=\psi\varphi$, где φ отображает R в прямую, а ψ — прямую в S_1. В реферируемой работе построено такое несущественное отображение двумерной сферы S_2 на себя, которое нельзя представить в виде суперпозиции $\psi\varphi$, где φ отображает S_2 в плоскость, а ψ — плоскость в S_2. Таким образом, сформулированная выше теорема Эйленберга не может быть распространена на случай двумерной сферы. *Ю. М. Смирнов*

3974. Об одной теореме компактификации. Кнастер (Un théorème sur la compactification. Knaster B.), Roczn. Polskiego towarz. mat., (Ann. Soc, polon. math.), 1952, 25, 252—257 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Пусть X — метрическое n-мерное пространство со счетной базой. Ищутся условия, при выполнении которых X может быть таким образом топологически вложено в компакт X^*, что

$$\dim_p X^* = n \quad \text{при } p \in X,$$

$$\dim_p X^* > n \quad \text{при } p \in X^* \setminus X.$$

Необходимое условие: X должно быть абсолютным G_δ (т. е. гомеоморфным полному метрическому пространству). Это условие оказывается и достаточным, если X допускает такую компактификацию, в которой оно является пересечением счетного числа открытых множеств, причем границы этих открытых множеств имеют размерности $\leqslant n-1$. В связи с этим результатом автор приходит к подразделению совокупности абсолютных G_δ-множеств на два класса и показывает, что в обоих классах имеются множества произвольно сложной в некотором смысле структуры.

П. С. Александров

3975. О покрытиях двумерных пространств. Стоун (On coverings of two-dimensional spaces. Stone A. H.), Proc. London Math. Soc., 1953, сер. 3, **3**, № 11, 338—349 (англ.)

Пусть $\mathcal{U}=(U_1, \ldots, U_m)$ — конечное покрытие нормального пространства S. Элементы U_i и U_j называются соседями, если они пересекаются. Положим $l(\mathcal{U})=\max(\nu_1, \ldots, \nu_m)$, где ν_i есть число соседей элемента U_i в покрытии $\mathcal{U}$. Число $l(\mathcal{U})$ называется плотностью покрытия $\mathcal{U}$. Плотностью $l(S)$ пространства S называется наименьшее из таких целых чисел l, что во всякое конечное открытое покрытие пространства S можно вписать конечное открытое покрытие $\mathcal{U}$, для которого $l(\mathcal{U})\leqslant l$. Референтом было доказано (Докл. АН СССР, 1950, **75**, 605—608), что плотность любого двумерного компакта на меньше шести.

В реферируемой работе исследуется вопрос о верхней границе плотности. Показано, что верхняя грань плотности для любых n-мерных нормальных пространств совпадает с верхней гранью плотности для n-мерных полиэдров. Для двумерных полиэдров плотность не превосходит семи. Если S есть поверхность с эйлеровой характеристикой $\chi<0$, то $l(S)=7$, причем в любом достаточно мелком покрытии поверхности S, имеющем плотность 7, найдется не менее -6χ элементов покрытия, имеющих по 7 соседей. Покрытия, имеющие плотность 7 и содержащие ровно -6χ элементов, обладающих семью соседями, автор называет минимальными. Оказывается, что каждая поверхность S отрицательной эйлеровой характеристики имеет сколь угодно мелкие минимальные покрытия, причем каждый элемент минимального покрытия имеет не менее шести соседей, а нерв минимального покрытия гомеоморфен поверхности S. Аналогичные рассмотрения проведены для поверхностей неотрицательной характеристики. Автор пользуется методами, ранее примененными О. В. Локуциевским (Успехи матем. наук, 1950, 5, 165—167), который доказал, что плотность плоскости равна шести. В заключение ставится вопрос о нахождении всех двумерных полиэдров плотности 6.

В. Г. Болтянский

3976. Обобщение теоремы Анны Малликин. Эст (A generalization of a theorem of Miss Anna Mullikin. Est W. T. van), Fundam. math., 1952, **39**, 179—188 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

В работе доказываются аддиционные теоремы типа Фрагмена — Брауэра (в смысле референта), но для счетного числа слагаемых. Типичный пример, дающий наиболее важный (по мнению референта) результат автора:

Пусть A — компакт, лежащий в n-мерном евклидовом пространстве R, и z — цикл на A. Пусть $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ — попарно непересекающиеся компакты, лежащие в $R^n \setminus A$. Если $z \sim 0$ в $R^n \setminus \Phi_k$ при любом k, то, каков бы ни был компакт $\Phi \subseteq \bigcup_k \Phi_k$, цикл z гомологичен нулю в $R^n \setminus \Phi$.

Примечание референта. Автор, упоминая гомологическую теорию «Каплана — Александрова», цитирует заметку референта (Докл. АН СССР, 1947, 57, 107—110), в которой, впрочем, содержится первая общая теорема двойственности для любых множеств n-мерного евклидова пространства; никакого аналога этой теоремы и вообще какой бы то ни было теоремы двойственности для групп (а не для чисел) Бетти в цитированной автором работе Каплана нет. Работа референта «Основные теоремы двойственности для незамкнутых множеств» (Матем. сб., 1947, 21 (63), № 2, 161—232), совершенно неудовлетворительно прореферированная в Math. Rev., осталась автору неизвестной. В этой работе (в отличие от работы С. Каплана) не только доказан (с существенным применением результатов Г. С. Чогошвили) общий закон двойственности, но и действительно заложены основы гомологической теории незамкнутых множеств евклидовых пространств. Свое полное развитие эта теория получила в ряде заметок и в большой статье Ситникова «Комбинаторная топология незамкнутых множеств» (Матем. сб., 1954, 34 (76), № 1,3—54), где доказано несколько фундаментальных теорем двойственности, позволяющих говорить о новой сложившейся главе топологии: гомологической (или комбинаторной) топологии незамкнутых множеств.

П. С. Александров

3977. Об обобщенных пределах. Динкуляну (Despre limite generalizate. Dinculeanu Nicolae), Bul. Ştiinţ. Acad. R. P. Române, Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 1, 207—214 (рум.; резюме русск., франц.)

Пусть F — фильтр на множестве E. Для топологического пространства E' и каждого $A \in F$ обозначим через $C(A, E', F)$ совокупность таких отображений f множества A в E', что $\overline{f(A)}$ компактно. Применяя конструкцию Чеха для компактных расширений, Сикорский (Sikorski R., Studia math., 1951, 12, № 1, 117—124) определил для отображений $f \in C(A, E', F)$ обобщенный предел, имеющий свойства обычного предела. В реферируемой заметке обобщенный предел строится при помощи максимальных фильтров (ультрафильтров) (Bourbaki N., Elem. Math., III, Topologie générale, Hermann, Paris, 1940, гл. I, 1942, гл. III). Даются приложения построенной теории к отображениям в компактные группы и к мере Хаара в компактных группах со значениями в топологическом поле, отличном от поля комплексных чисел.

Н. Я. Виленкин

3978. О гомологической структуре функционального пространства S_m^X. Борсук (Concerning the homological structure of the functional space S_m^X. Borsuk Karol), Fundam. math., 1952, 39, 25—37 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

В этой работе автор продолжает свои известные исследования о связях между гомологическими свойствами пространства X и свойствами пространства S_m^X непрерывных отображений пространства X в m-мерную сферу S^m. Исходя из понятия истинного цикла, в смысле, в котором это понятие было введено референтом (т. е. без сходимости и с переменной областью коэффициентов), автор приходит к важному понятию k-мерного сферического цикла метрического пространства X, т. е. такого k-мерного истинного цикла z^k пространства X, что существует непрерывное отображение сферы S^k в X, переводящее некоторый k-мерный истинный цикл сферы в цикл, гомологичный циклу z^k в X. Истинный цикл z^k в X называется сферически существенным, если существует непрерывное отображение пространства X на S^k, переводящее z^k в цикл, негомологичный нулю в S^k.

Усиливая давний результат референта (Math. Ann., 1939, 106, 223), автор доказывает, что во всяком k-мерном метрическом пространстве X всякий k-мерный истинный цикл, негомологичный нулю в X, является сферически существенным. Основным результатом работы является следующая теорема:

Если компакт X содержит k-мерный сферически существенный истинный цикл z^k (с произвольными коэффициентами), то в пространстве S_m^X, $m > k$, имеется сходящийся $(m-k)$-мерный истинный сферический цикл ζ^{m-k} с целыми коэффициентами, негомологичный нулю в S_m^X. Если все (за исключением, быть может, конечного числа) группы коэффициентов $\mathfrak{A}_\nu$, по которым берутся циклы z_ν^k в z^k не имеют элементов конечного порядка, то цикл ζ^{m-k} может быть предположен даже сильно негомологичным нулю в S_m^X.

В заключение автор указывает некоторые задачи, среди которых наиболее важной представляется следующая: Пусть X — компакт, размерность которого не превосходит k; определяются ли гомологические свойства пространства S_m^X (для $m \geqslant k$) гомологическими свойствами пространства X.

П. С. Александров

3979. О теоремах Фрёйденталя. Уайтхед (On the Freudenthal theorems. Whitehead George W.), Ann. Math., 1953, 57, № 2, 209—228 (англ.)

Теоремы Фрёйденталя о гомотопических группах сфер принадлежат к числу существенных результатов гомотопической топологии. В них утверждается, что весьма просто и геометрично определяемый гомоморфизм E надстройки, переводящий группу $\pi^q(S^n)$ в $\pi^{q+1}(S^{n+1})$, является отображением на всю группу $\pi^{q+1}(S^{n+1})$ при $q \leqslant 2n-1$ и изоморфизмом при $q < 2n-1$. Кроме того, Фрёйденталь установил другие частные результаты о гомоморфизме E. Доказательства самого Фрёйденталя (Compositio math., 1937, 5, 299—314) очень громоздки. Более простое, хотя и не очень короткое, доказательство можно получить методами, развитыми в заметках Л. С. Понтрягина (о методах Л. С. Понтрягина см., например, статью В. А. Рохлина, Успехи матем. наук, 1950, 5, 88—101).

Реферируемая работа посвящена изложению нового, чисто гомотопического доказательства теорем Фрёйденталя. Пусть S^{n+1} — сфера размерности $n+1$, S^n — ее экваториальная сфера и p — точка сферы S^n. Обозначим через v вектор, касательный к сфере S^{n+1} в точке p и ортогональный к несущей плоскости сферы S^n. Далее, для любой отличной от p точки $x \in S^n$ обозначим через $P(x)$ двумерную плоскость, проходящую через точки p и x и параллельную вектору v, а через $\Phi(x)$ — окружность $S^{n+1} \cap P(x)$. При $x=p$ положим $\Phi(x) = p$. Будем рассматривать окружность $\Phi(x)$ как замкнутый путь с началом в точке p, пробегаемый в надлежаще выбранном направлении. Тогда Φ есть гомеоморфное отображение сферы S^n в пространство Ω^{n+1} (пространство петель), точками которого служат замкнутые в точке p пути сферы S^{n+1}. Это отображение индуцирует гомоморфизм Φ_* группы $\pi^q(S^n)$ в $\pi^q(\Omega^{n+1})$. Далее, всякое отображение куба I^q в пространство петель Ω^{n+1}, переводящее границу куба в точку $\Phi(p)$, эквивалентно отображению куба I^{q+1} в S^{n+1}, переводящему границу этого куба в p. Это соответствие порождает известный изоморфизм Гуревича η между группами $\pi^q(\Omega^{n+1})$ и $\pi^{q+1}(S^{n+1})$. Оказывается, что гомоморфизм $\gamma_i \Phi_*$ группы $\pi^q(S^n)$ в $\pi^{q+1}(S^{n+1})$ совпадает с E. Пользуясь этим описанием гомоморфизма надстройки и применяя ряд других гомоморфизмов гомотопических групп, автор устанавливает некоторые соотношения между гомотопическими группами, из которых вытекают результаты Фрёйденталя. *В. Г. Болтянский*

3980. Новое доказательство единственности алгебры ∇-гомологий с компактными носителями локально компактного пространства. Фари (Sur une nouvelle démonstration de l'unicité de l'algèbre de cohomologie à supports compacts d'un espace localement compact. Fáry István), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 11, 552—554 (франц.)

Доказывается, что построение, предложенное Лере (о теории Лере для компактов см. РЖМат, 1953, 127), приводит к единственным группам ∇-гомологий. Пусть X — произвольное локально компактное (компактность понимается в смысле бикомпактности) пространство и K — некоторое его мелкое A-перекрытие с компактными носителями $S(k)$; мелкость A-перекрытия автор понимает в том смысле, что для любого компакта $C \subset X$ комплекс CK обладает единицей. Подперекрытием перекрытия K называется подалгебра K_+ алгебры K, которая является мелким A-перекрытием относительно носителей $S_+(k)$, определенных формулой $S_+(k) = S(k)$, где $k \in K_+$. Любые два мелких A-перекрытия K_1 и K_2 являются подперекрытиями некоторого третьего A-перекрытия, например, их пересечения $K_1 \circ K_2$. С другой стороны, оказывается, что группы ∇-гомологий любого мелкого A-перекрытия изоморфны группам ∇-гомологий произвольного его подперекрытия, так как для любого элемента $k \in K$ существует такой элемент $l \in K$, что $k + dl \in K_+$. Построение элемента l производится индукцией по числу $\mathrm{kat}(k)$, где $\mathrm{kat}(k)$ есть наименьшее из таких чисел m, что существуют замкнутое покрытие $F_1, \ldots, F_m$ пространства X и элементы $a_i \in K$, для которых $F_i k = F_i da_i$.

Теорема единственности непосредственно следует из сопоставления высказанных выше утверждений. Заметим, что частным случаем теоремы единственности является известная теорема де Рама.

М. М. Постников

См. также: 3965, 3972, 4061, 4090

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3981. Замечания о компактности и непрямом произведении мер. Марчевский, Рылл-Нардзевский (Remarks on the compactness and non direct products of measures. Marczewski E., Ryll-Nardzewski C.), Fundam. math., 1953, **40**, 165—170 (англ.)

Пусть M и N — некоторые кольца, состоящие из подмножеств соответственно множеств X и Y, пусть μ и ν — какие-либо меры, определенные соответственно на M и N. Через $X \times Y$ обозначается декартово произведение X и Y. Мера λ, определенная на минимальном кольце, содержащем все множества вида $A \times B$, где $A \in M$, $B \in N$, называется произведением мер μ и ν, если она удовлетворяет условию

$$\lambda(A \times Y) = \mu A, \quad \lambda(X \times B) = \nu B$$

для всех $A \in M$, $B \in N$.

Доказывается, что

1. Если μ — счетноаддитивная мера, а мера ν компактна, то мера λ также счетноаддитивна.

2. Существуют две счетноаддитивные меры μ и ν такие, что их произведение не счетноаддитивно.

Далее изучаются некоторые свойства внутренней меры произведения мер, неатомических компактных мер и вполне атомических пространств.

Л. Д. Кудрявцев

3982. Критерий для сходимости по длине и дифференцируемости рядов. Скорца-Драгони (Un criterio di convergenza in lunghezza e la derivazione per serie. Scorza Dragoni Giuseppe), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 1, 177—180 (итал.)

Дается простое доказательство теоремы Баяда (Baiada E., Ann. Scuola. norm. sup. Pisa, 1952, **6**, 59—68):

Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... абсолютно непрерывны на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяют условию

$$\int_a^{b-h} |f_n'(x+h) - f_n'(x)|\, dx \leqslant \varepsilon_n(h)$$

$(0 < h < b-a;\ n = 1, 2, \ldots)$,

где $\varepsilon_n(h) \to 0$ при $h \to 0$ и

$$\sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon_n(h/2^r) \leqslant \sigma(h) \quad (n = 1,2,\ldots),$$

причем $\sigma(h) \to 0$ при $h \to 0$. Если последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots$ сходится на $[a, b]$ равномерно к функции $f(x)$ с ограниченным изменением, то при $n \to \infty$ $l_n \to l$, где l_n, l — соответственно длины кривых с уравнениями $y = f_n(x)$, $y = f(x)$ $(x \in [a, b])$; кроме того, последовательность производных $f_1'(x), f_2'(x), \ldots$ сходится по мере к $f'(x)$.

Н. К. Бари

3983. Об R-интегрируемости суперпозиции R-интегрируемых функций. Заславский И. Д., Вестн. Ленингр. ун-та, 1953, № 11, 49—55

Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется R^*-функцией, если для всякой функции $\varphi(t)$, определенной и R-интегрируемой на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ и такой, что $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$ при $t \in [\alpha, \beta]$, суперпозиция $f[\varphi(t)]$ также R-интегрируема. Доказывается, что для того чтобы функция $f(x)$ была R^*-функцией, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна. Функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[\alpha, \beta]$, называется R_*-функцией, если для всякой функции $f(x)$, заданной и R-интегрируемой на отрезке $[a, b]$, где $a = \inf \varphi(t)$, $b = \sup \varphi(t)$, суперпозиция $f[\varphi(t)]$ также R-интегрируема. Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $\varphi(t)$ была R_*-функцией. Показывается, что функция, аналитическая на некотором отрезке, есть R_*-функция; вместе с тем приводится пример бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся R_*-функцией.

Л. Д. Кудрявцев

3984. О неравномерной сходимости последовательности непрерывных функций. Гехт Б. И., Тр. Новочеркасского политехн. ин-та, 1953, 23, 161—162

Для любого замкнутого нигде не плотного множества P на сегменте $[0,1]$ существует последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$, сходящаяся всюду на $[0,1]$ к 0, множество точек неравномерной сходимости которой совпадает с P.

Ф. В. Широков

3985. Поправки к работе Криккеберга «К теории верхних и нижних интегралов» (Berichtigungen zu K. Krickeberg, Zur Theorie des oberen und unteren Integrals), Math. Nachr., 1953, **10**, № 5—6, 383 (нем.)

Две поправки к ранее напечатанной работе (РЖМат, 1953, 146).

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

3986. Об абсолютной сходимости рядов по ортогональным многочленам. Фрёйд (Über die absolute Konvergenz von orthogonalen Polynomreihen. Freud Géza), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 1—2, 127—135 (нем.)

Обычно при рассмотрении вопроса об абсолютной сходимости ортогональных рядов ограничиваются отысканием достаточных условий сходимости ряда $\sum |c_n|$, где $f(x) \in L^2$, $f(x) \sim \sum c_n \Phi_n(x)$, а $\{\Phi_n(x)\}$ — заданная ортонормированная система функций (см., например, Стечкин С. Б., Матем. сб., 1951, **29(71)**, 225—232). Такого рода предложения позволяют сделать вывод о сходимости ряда

$$\sum |c_n \Phi_n(x)| \tag{1}$$

лишь в том случае, если в рассматриваемой точке x $|\varphi_n(x)| \leqslant M$, а также тот вывод, что ряд (1) сходится почти всюду. Автор рассматривает вопрос о сходимости ряда (1) в фиксированной точке x.

Теорема I. Пусть

$$w(x) \geqslant 0, \int_{-1}^{+1} \Phi_m(x)\Phi_n(x)\, w(x)\, dx = \delta_{mn},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\Phi_\nu(x)|^2 \leqslant Kn, \quad E_n^{(2)} = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \right\}^{1/2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} E_n^{(2)} < \infty.$$

Тогда ряд (1) сходится.

Эта теорема применяется к исследованию абсолютной сходимости рядов по ортогональным многочленам. Приведем одно типичное предложение:

Теорема III. Пусть $w(x) \leqslant W(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n,

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, w(x)\, dx = \delta_{nm},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |P_\nu(x)_{\nu}|^2 = O(n),$$

$$\omega^{(2)*}(\delta, f) = \left\{ \max_{|h| \leqslant \delta} \int_0^{\pi} [f(\cos(\theta + h)) - f(\cos\theta)]^2\, d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(2)*}\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty.$$

Тогда ряд (1) сходится.

Опечатки: стр. 128, строка 4 снизу, напечатано $\int_a^b$.

должно быть $\int_{-1}^{+1}$; стр. 129, строка 5 сверху, напечатано (2), должно быть (2a); стр. 130, формула (14), напечатано $\omega_n^{(2)*}(\delta, f)$, должно быть $\omega^{(2)*}(\delta, f)$; стр. 130, формула (16), — аналогичное исправление; стр. 131, формула (21), напечатано

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt{n}} < \infty,$$

должно быть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{(2)*}\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt{n}} < \infty;$$

стр. 131, строка 12 снизу, напечатано $\alpha p < 1$, должно быть $\alpha p > 1$; стр. 132, формула (23), напечатано $O(n^{-1-\delta})$, должно быть $O(n^{-\frac{1}{2}-\delta})$; стр. 132, формула (25), напечатано $o(n^{-\frac{1}{2}})$, должно быть $O(n^{-\frac{1}{2}})$; стр. 134, последние строки, напечатано Proc. of the London Math. Soc., должно быть J. of the London Math. Soc. *С. Б. Стечкин*

3987. Теорема Фату — Рисса и теорема локализации Римана при абсолютной сходимости. Юркат, Пейеримхофф (Der Satz von Fatou — Riesz und der Riemannsche Lokalisationssatz bei absoluten Konvergenz. Jurkat W., Peyerimhoff A.), Arch. Math., 1953, 4, № 4, 285—297 (нем.)

Известна следующая теорема Фату: если $\alpha_n \to 0$, то ряд $f(z) = \sum \alpha_n z^n$ сходится во всякой точке единичной окружности, в которой функция $f(z)$ регулярна.

М. Рисс показал, что сходимость равномерна на всякой замкнутой дуге регулярности $f(z)$. Оба утверждения непосредственно вытекают из теоремы локализации Римана для тригонометрических рядов. В реферируемой статье вместо обычной сходимости рассматривается абсолютная и устанавливаются соответствующие аналоги теоремы Фату и локализационной теоремы Римана, при этом обнаруживается более глубокая связь между обеими теоремами. Авторы также получают некоторые необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости тригонометрических рядов.

Последовательность $\{a_n\}$, по определению, сходится абсолютно, если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| < +\infty$; в этом случае будем писать $a_n = a\,(1)$. Положим:

$$\overline{\Delta}^p a_n = \sum_{\nu=0}^{p} \binom{p}{\nu} (-1)^\nu a_{n-\nu}, \text{ где } a_k = 0 \text{ для } k < 0.$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Если коэффициенты степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ удовлетворяют для некоторого целого числа $p \geqslant 0$ условию $\overline{\Delta}^p a_n = a\,(1)$ и если $f(z)$ регулярна при $z = 1$, то $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

Назовем ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно равносходящимися, если $\sum |a_n - b_n| < +\infty$.

Положим $A_n(x) = a_n \cos nx + a_n' \sin nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Из теоремы 1 выводится

Теорема 2. Два ряда $\frac{a_0}{2} + \sum A_n(x)$ и $\frac{b_0}{2} + \sum B_n(x)$ тогда и только тогда являются всюду абсолютно равносходящимися, если выполнены следующие условия:

а) для некоторого целого числа $p \geqslant 0$

$$\overline{\Delta}^p (a_n - b_n) = a\,(1),\ \overline{\Delta}^p (a_n' - b_n') = a\,(1);$$

б) существует периодическая функция $P(x)$ такая, что ряд, полученный из ее ряда Фурье дифференцированием $(p+2)$ раза, всюду абсолютно сходится и в некотором интервале $|x| \leqslant \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi$, $P(x)$ совпадает с $(p+2)$-кратным интегралом ряда

$$\frac{a_0 - b_0}{2} + \sum [A_n(x) - B_n(x)].$$

При помощи теоремы 2 устанавливаются следующие теоремы об абсолютной сходимости ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum A_n(x), \qquad (1)$$

в которых

$$F(x, r) = \frac{a_0}{2} + \sum A_n(x)\, r^n.$$

Теорема 4. Для того чтобы ряд (1) всюду абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) для некоторого целого числа $p \geqslant 0$ $\overline{\Delta}^p a_n = a\,(1)$, $\overline{\Delta}^p a_n' = a\,(1)$;

2) $F(x, r) = O(1)$ $(r \to 1)$ равномерно для всех x с $|x| \leqslant \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi$;

3) существует периодическая функция $p(x)$, ряд Фурье которой всюду абсолютно сходится и такая, что

$$\lim_{r \to 1-0} F(x, r) = p(x) \quad \text{для } 0 < |x| < \varepsilon.$$

Теорема 5. Для того чтобы ряд (1) всюду абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $a_n = a\,(1)$, $a_n' = a\,(1)$;

2) $\sum a_n$ суммируем методом Абеля;

3) существует периодическая функция $p(x)$, ряд Фурье которой всюду абсолютно сходится и такая, что

$$\lim_{r \to 1-0} F(x, r) = p(x) \text{ для } |x| < \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \pi.$$

И. Е. Жак

3988. Добавление к результатам в теории единственности двойных тригонометрических рядов. Шапиро (An extension of results in the uniqueness theory of double trigonometric series. Shapiro Victor L.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 3, 359—365 (англ.)

Автор доказывает ряд теорем, обобщающих результаты Чжэна (M. Cheng) в теории единственности двойных тригонометрических рядов

$$\sum_M a_M e^{iMX}. \qquad (1)$$

Определение 1. Ряд (1) с произвольными комплексными коэффициентами $a_M = o$ (1) при $|M| \to \infty$ называют сходящимся по кругам в точке X к $L(X)$, если

$$S_R(X) = \sum_{|M| \leqslant R} a_M e^{iMX}$$

стремится к конечному значению $L(X)$. Здесь введены обозначения: $M = (m, n)$, $X = (x, y)$, $MX = mx + ny$, $|M| = (m^2 + n^2)^{1/2}$.

Определение 2. Ряд (1) суммируем $(C, 1)$ к $L(X)$, если

$$\sigma_R(X) = \frac{2}{R^2}\int_0^R S_u(X)\, u du = \frac{S_R^{(1)}(X)}{R^2}$$

сходится к $L(X)$.

Определение 3. Ряд (1) называют рядом типа (U), если

$$\sum_{1 \leqslant |M| \leqslant R} \frac{a_M e^{iMX}}{|M|^2}$$

сходится равномерно в X.

Квадрат $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi)$ обозначается через Ω, а все множества $Z \subset \Omega$, встречающиеся в формулировках теорем, предполагаются замкнутыми емкости нуль.

Автор доказывает следующие теоремы о рядах типа (U) при условии $a_M = o$ (1):

Теорема 1. Пусть даны ряд (1) и множество Z. Предположим, что: 1) ряд суммируем $(C, 1)$ почти всюду к нулю и 2) $\overline{\lim}\, |\sigma_R(X)| < \infty$ для $X \in \Omega - Z$.

Тогда $a_M = 0$ для всех M.

Теорема 2. Пусть ряд (1) суммируем $(C, 1)$ почти всюду к существенно ограниченной функции $f(x)$ и $\overline{\lim}\, |\sigma_R(X)| < \infty$ для $X \in \Omega - Z$. Тогда данный ряд является рядом Фурье функции $f(X)$.

Теорема 3. Пусть ряд

$$\sum_{1 \leqslant |M|,\, m \cdot n \neq 0} a_{mn} \sin mx \sin ny$$

суммируем $(C, 1)$ почти всюду к интегрируемой функции $f(X)$ и $\overline{\lim}\, |\sigma_R(X)| < \infty$ при $X \in \Omega - Z$. Тогда данный ряд является рядом Фурье функции $f(X)$.

В теореме 3 предполагается, естественно, что

$$a_{m,n} = a_{-m,-n} = -a_{m,-n} = -a_{-m,n}.$$

П. Л. Ульянов

3989. О собственных значениях некоторых эрмитовых форм. Кац, Мердок, Сегё (On the eigen-values of certain Hermitian forms. Kac M., Murdock W. L., Szegö G.), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, **2**, № 4, 767—800 (англ.)

Пусть $f(x, \theta)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ — 2π-периодическая функция относительно θ, комплексные коэффициенты Фурье $\psi_n(x)$ которой непрерывны на $[0, 1]$, причем

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\psi_n(x)| \leqslant M,$$

где M не зависит от x. Матрица

$$A_n = \left(\psi_{\nu-\mu}\left(\frac{\mu+\nu}{2n+2}\right)\right),\ \mu, \nu = 0, 1, \ldots, n \qquad (1)$$

является матрицей эрмитова типа.

Доказывается:

1. Если $\lambda_1^{(n)} \leqslant \lambda_2^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n+1}^{(n)}$ — собственные значения матрицы A_n, то $|\lambda_\nu^{(n)}| \leqslant M$, $\nu = 1, 2, \ldots, n+1$.

2. Если $F(\lambda)$ — любая интегрируемая в смысле Римана на $-M \leqslant \lambda \leqslant M$ функция, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(\lambda_1^{(n)}) + F(\lambda_2^{(n)}) + \ldots + F(\lambda_{n+1}^{(n)})}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 F[f(x, \theta)]\, dx d\theta.$$

3. Если $N(n; \alpha, \beta)$ — число собственных значений $\lambda_\nu^{(n)}$, для которых $\alpha \leqslant \lambda_\nu^{(n)} \leqslant \beta$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n; \alpha, \beta)}{n+1} = \frac{\sigma}{2\pi},$$

где σ — площадь области, образованной точками (x, θ) прямоугольника $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, где $\alpha \leqslant f(x, \theta) \leqslant \beta$.

4. Если 2π-периодические функции $f(\theta)$ и $g(x)$ интегрируемы в смысле Римана, причем $0 < m \leqslant f(\theta) + g(x) \leqslant M$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \Delta_n}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \log[f(\theta) + g(x)]\, dx d\theta,$$

где Δ_n — определитель формы

$$H_n = T_n(f) + \sum_{\nu=1}^{n} g(\nu/n)\, |u_\nu^2| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, |u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n|\, d\theta + \sum_{\nu=1}^{n} g(\nu/n)\, |u_\nu^2|,\ z = e^{i\theta}.$$

5. Пусть $f(\theta)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, достигающая своего минимума m в единственной точке θ_0 интервала $(-\pi, \pi)$. Если в некоторой окрестности θ_0 существует непрерывная вторая производная $f''(\theta)$, причем $f''(\theta_0) \neq 0$, то для фиксированного ν и $n \to \infty$

$$\lambda_\nu^{(n)} - m \cong f\left(\theta_0 + \frac{\nu\pi}{n}\right) - f(\theta_0) \cong c\frac{\nu^2\pi^2}{n^2},$$

$$\nu = 1, 2, 3 \ldots,$$

где $c = \frac{1}{2}f''(\theta_0)$.

6. Если $f(\theta)$ такова, что $|f(\theta)]^{2/\alpha}$, $0 < \alpha < 2$, удовлетворяет условиям теоремы 5 с $\theta_0 = 0$, $m = 0$, то для фиксированного ν и $n \to \infty$

$$A < \lambda_\nu^{(n)} n^\alpha < B,$$

где положительные постоянные A, B зависят только от ν. Приведенные теоремы обобщают результаты, касающиеся случая, когда $f(x, \theta)$ не зависит от x (Szegö G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., N. Y., 1939, **23**, 193—294).

Кроме того, в работе устанавливаются некоторые результаты для интегральных уравнений вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha x)\rho(x-y)K(\alpha y)\varphi(y)\,dy = \lambda\varphi(x), \quad (2)$$

где $\rho(x)$ — четная функция из $L(-\infty, \infty)$, для которой

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) e^{i\xi x} dx$$

также принадлежит $L(-\infty, \infty)$, а $K(x)$ — ограниченная функция из $L^2(-\infty, \infty)$. Доказывается:

1) Пусть $N_\alpha(a, b)$ — число собственных значений уравнения (2), расположенных в интервале (a, b), не содержащем нуля. Если множества точек (x, ξ), для которых $K^2(x)F(\xi)$ равно a или b, имеют меру нуль, то

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha N_\alpha(a, b) = \frac{1}{2\pi}\Omega(a, b),$$

где $\Omega(a, b)$ — мера множества точек (x, ξ), для которых $a < K^2(x)F(\xi) < b$.

2) Если $K(x) = 1$ для $|x| < 1$, $K(x) = 0$ для $|x| \geqslant 1$, то для достаточно малых $|\lambda|$

$$\lim_{\alpha\to\infty} (D_\alpha(\lambda))^{1/\alpha} = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \log(1 - \lambda F(\xi))\,d\xi,\right.$$

где $D_\alpha(\lambda)$ — определитель Фредгольма для уравнения (2).

Наконец, для функции Бесселя $J_n(x)$ доказывается: Если $r_n(n)$ — n-й положительный корень уравнения $J_n(x) = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} r_n(n) = 1 + x_1^2,$$

где x_1 — первый положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$. *М. Д. Калашников*

3990 К. Многочлены Бернштейна. Лоренц (Bernstein polynomials. Lorentz G. G., 10 + 130 pp., University of Toronto Press, Toronto, 1953, 5.75 doll.), Math. scand., 1953, **1**, № 2, 21 (библ.)

См. также: 3943, 3995, 4079

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3991. О проблеме сложения особенностей рядов Дирихле. Бламбер (Un problème de composition des singularités des séries de Dirichlet générales. Blambert Maurice), Acta math., 1953, 89, № 3—4, 217—242 (франц.)

Теорема Адамара об умножении особенностей степенных рядов утверждает, что если $f(z) = \sum a_n z^n$, $\varphi(z) = \sum b_n z^n$ и $\psi(z) = \sum a_n b_n z^n$, то особые точки γ функции $\psi(z)$ имеют вид: $\gamma = \alpha\cdot\beta$, где α — особая точка $f(z)$, β — особая точка $\varphi(z)$. Многие авторы исследовали вопрос, при каких условиях точка $\alpha\cdot\beta$ действительно является особой для $\psi(z)$. Пойа, в частности, показал, что если α — полюс $f(z)$, лежащий на границе круга сходимости, а β — произвольная особая точка $\varphi(z)$, лежащая на границе круга сходимости ряда для $\varphi(z)$, то тогда $\alpha\cdot\beta$ — особая точка $\psi(z)$.

Теорема Адамара не обобщается непосредственно на ряды Дирихле. Для рядов Дирихле имеет место видоизмененная теорема, установленная Мандельбройтом (см. теоремы A и B настоящего реферата; более подробно см., например, Bernstein V., Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, 1933, Paris, 203—228). Эта теорема в существенных чертах сводится к утверждению, что если $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ $(\lambda_n \uparrow \infty)$ и $\varphi(s) = \sum b_n e^{-\mu_n s}$ $(\mu_n \uparrow \infty)$, то особые точки функции

$$\psi(s) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(t)\varphi(s-t)\frac{dt}{t^{1+k}} = \sum a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-\mu_n s}$$

(k — натуральное число, $a_{\mu_n}^{(k)} = \sum'_{\lambda_m < \mu_n} (\mu_n - \lambda_m)^k a_m$, $c > \max(0, \sigma_A^f)$, σ_A^f — абсцисса абсолютной сходимости ряда для $f(s)$) содержатся в множестве точек вида $\alpha + \beta$, где α и β — особые точки соответственно $f(s)$ и $\varphi(s)$. В статье рассматривается вопрос об условиях, при которых точка $\gamma = \alpha + \beta$ будет действительно особой для $\psi(s)$. При этом автор стремится обобщить на ряды Дирихле выше указанный результат Пойа и в соответствии с этим

предполагает, что точка β есть полюс для $\varphi(s)$. В следующей работе автор предполагает рассмотреть случай, когда β — существенно особая точка для $\varphi(s)$. Чтобы сформулировать результаты, введем необходимые понятия и обозначения.

Пусть σ_C^f и σ_A^f — абсциссы соответственно простой и абсолютной сходимости ряда $f(s)=\sum a_n e^{-\lambda_n s}$. Пусть Δ — область из полуплоскости $\operatorname{Re} s=\sigma>\sigma_1$ со свойствами: 1) Δ содержит точки s такие, что $\operatorname{Re} s=\sigma>\sigma_A^f$; 2) в Δ функция $f(s)$ регулярна и однозначна. По определению, $f(s)$ называется «однозначной O_M» («uniforme U_M») в полуплоскости $\operatorname{Re} s>\sigma_1$, если существует область $\Delta(\sigma_1)$, в которой $f(s)$ регулярна и однозначна и которая содержит каждую область Δ с указанными выше свойствами. Замкнутое множество всех тех точек полуплоскости $\sigma\geqslant\sigma_1$, которые не лежат в $\Delta(\sigma_1)$, обозначается через $S_f^{\sigma_1}$ и называется особым множеством $f(s)$ по отношению к полуплоскости $\sigma>\sigma_1$ (ни в какую точку $S_f^{\sigma_1}$ нельзя аналитически продолжить $f(s)$ по пути, не пересекающему прямую $\sigma=\sigma_1$). Пусть в дальнейшем P_f и $\bar{P}_f$ обозначают соответственно полуплоскости $\sigma>\sigma_1$ и $\sigma\geqslant\sigma_1$. Будем говорить, что единственно «возможными» особыми точками $f(s)$ в P_f являются точки замкнутого множества S, если во всякой области

$$\Delta\subset\overline{\frac{C}{P_f}}\,(\bar{P}_f\cap S),$$

содержащей точки полуплоскости $\sigma>\sigma_C^f$, функция $f(s)$ регулярна. Теперь введем понятие «порядка Π_M» («l'ordre O_M»).

Пусть $f(s)$ «однозначна O_M» в P_f. Положим $S_f^{\sigma_1}(\varepsilon)=\bigcup c(s,\varepsilon)$, $s\in S_f^{\sigma_1}$, где $c(s,\varepsilon)$ — открытый круг с центром в s радиуса ε. Если при любых $\eta>0$ и $\varepsilon>0$ выполняется для

$$s=(\sigma+it)\in\overline{\frac{C}{P_f}}\,(P_f\cap S_f^{\sigma_1}(\varepsilon))$$

при достаточно больших $|t|$ неравенство $|f(s)|<N(\varepsilon,\eta,\sigma_1)\,|t|^{\nu+\eta}$ (причем ν — наименьшее с этим свойством), то будем говорить, что ν есть «порядок Π_M» функции $f(s)$ в P_f.

Пусть σ_H^f — абсцисса голоморфизма $f(s)$, т. е. $\sigma_H^f=\inf\sigma'$, где σ' таково, что в полуплоскости $\sigma>\sigma'$ $f(s)$ регулярна; $\sigma_H^f(\sigma_1)$ — абсцисса голоморфизма $f(s)$ в P_f, т. е. $\sigma_H^f(\sigma_1)=\sup\sigma$, $s\in S_f^{\sigma_1}$. Пусть далее $S_{f\varphi}^{\sigma_1\sigma_2}$ — множество точек вида $\alpha+\beta$, где $\alpha\in S_f^{\sigma_1}$, $\beta\in S_\varphi^{\sigma_2}$. Будем говорить, что точка $\gamma\in(S_\varphi^{\sigma_2}\cup\bar{S}_{f\varphi}^{\sigma_1\sigma_2})$ есть точка γ^*, если существует жорданова дуга без кратных точек с началом в точке z_0, $\operatorname{Re} z_0>\sigma_A^f+\sigma_A^\varphi$, и концом в γ, все точки которой, исключая γ, принадлежат дополнению по отношению к $\bar{P}$ (полуплоскости $\sigma\geqslant\max(0,\sigma_H^f(\sigma_1))+\sigma_2$) пересечения $\bar{P}$ и $(S_\varphi^{\sigma_2}\cup\bar{S}_{f\varphi}^{\sigma_1\sigma_2})$.

При помощи этих понятий автор формулирует результат Мандельбройта в виде следующих двух теорем:

Теорема А. Пусть $f(s)=\sum a_n e^{-\lambda_n s}$, $\sigma_A^f<\infty$, «однозначна O_M» и «порядка Π_M», равного ν в $P_f(\sigma>\sigma_1)$, а $\varphi(s)=\sum b_n e^{-\mu_n s}$, $\sigma_A^\varphi<\infty$, «однозначна O_M» и «порядка Π_M», равного μ в $P_f(\sigma>\sigma_2)$. Пусть $S_f^{\sigma_1}$ — особое множество $f(s)$ по отношению к P_f, а $S_\varphi^{\sigma_2}$ — особое множество $\varphi(s)$ по отношению к P_φ. Если $k>\nu+\mu$, то для ряда $\psi(s)=\sum a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-\mu_n s}$ (он определен вначале) $\sigma_A^\psi\leqslant\max(\sigma_A^\varphi,\ \sigma_A^f+\sigma_A^\varphi)$, функция $\psi(s)$ «однозначна O_M» в полуплоскости $\sigma>\max[\sigma_H^f(\sigma_1),0]+\sigma_2$ и единственно «возможными» особыми точками $\psi(s)$ в этой полуплоскости являются точки множества $\bar{S}_{f\varphi}^{\sigma_1\sigma_2}\cup S_\varphi^{\sigma_2}$.

Теорема В. Если в условиях теоремы А точка $s=0$ является регулярной для $f(s)$, то $\psi(s)$ будет «однозначной O_M» в полуплоскости $\sigma>\sigma_H^f(\sigma_1)+\sigma_2$ и единственно «возможными» особыми точками в этой полуплоскости функции $\psi(s)-I_k(s)$, где

$$I_k(s)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j f^{(k-j)}(0)\,\varphi^{(j)}(s),$$

являются точки множества $\bar{S}_{f\varphi}^{\sigma_1\sigma_2}$.

На основе этих теорем автор получает следующие результаты. Обозначим через Q такое множество, что: а) $Q\subset S_f^{\sigma_1}$; б) Q находится на положительном расстоянии от своего дополнения по отношению к $S_f^{\sigma_1}$; в) Q не содержит начала.

Теорема 1. Пусть в условиях теоремы А (или В) дополнительно имеем: а) $\omega\in Q$; б) β — изолированная точка $S_\varphi^{\sigma_2}$, являющаяся полюсом для $\varphi(s)$; в) $\gamma=\omega+\beta$ есть γ^*, г) $\gamma\notin(S_\varphi^{\sigma_2}\cup\bar{S}_{f\varphi}^{\prime\sigma_1\sigma_2})$, где $S_{f\varphi}^{\prime\sigma_1\sigma_2}$ — множество точек вида $\alpha_1+\beta_1$, $\alpha_1\in S_f^{\sigma_1}$, $\beta_1\in S_\varphi^{\prime\sigma_2}$, причем $S_\varphi^{\prime\sigma_2}$ получается из $S_\varphi^{\sigma_2}$ удалением точки β. Тогда γ — особая точка для $\psi(s)$.

Теорема 2. Если в условиях теоремы А (или В): а) $\omega\neq0$ — изолированная точка $S_f^{\sigma_1}$, являющаяся полюсом для $f(s)$; б) $\beta\in S_\varphi^{\sigma_2}$; в) $\gamma=\omega+\beta$ есть γ^*; г) $\gamma\notin(S_\varphi^{\sigma_2}\cup\bar{S}_{f\varphi}^{\prime\sigma_1\sigma_2})$, где $S_{f\varphi}^{\prime\sigma_1\sigma_2}$ — множество точек вида $\alpha_1+\beta_1$, $\alpha_1\in S_f^{\prime\sigma_1}$, $\beta_1\in S_\varphi^{\sigma_2}$, причем $S_f^{\prime\sigma_1}$ получается из $S_f^{\sigma_1}$ удалением точки ω; тогда γ — особая точка для $\psi(s)$.

В теореме 3 делается аналогичное утверждение применительно к рядам, у которых показатели λ_n и μ_n — целые числа. В дальнейшем автор изучает случай, когда представление $\gamma=\omega+\beta$ не единственное. Этот случай, как утверждает автор, не рассматривался и для рядов Тейлора.

Теорема 4. Пусть в условиях теоремы А: а) $\alpha_n\neq0$ $(n=0,1,\ldots,N)$ — изолированные точки $S_f^{\sigma_1}$, являющиеся полюсами для $f(s)$, не удовлетво-

ряющими никакому соотношению вида $P(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N) = 0$, где P — многочлен с целыми коэффициентами относительно α_n; б) $\operatorname{Re}\alpha_n \neq 0$, $\operatorname{Re}\alpha_n \neq \operatorname{Re}\alpha_{n'}$, $n \neq n'$; в) существуют $\beta_n \in S_\varphi^{\sigma_2}$ такие, что $\gamma = \alpha_0 + \beta_0 = \alpha_n + \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$, есть γ^*; г) $\gamma \notin (S_\varphi^{\sigma_2} \cup \bar{S}_{f\varphi}^{\prime\sigma_1\sigma_2})$, где $S_{f\varphi}^{\prime\sigma_1\sigma_2}$ — множество точек вида $\alpha + \beta$, $\alpha \in S_f^{\prime\sigma_1}$, $\beta \in S_\varphi^{\sigma_2}$, причем $S_f^{\prime\sigma_1}$ получается из $S_f^{\sigma_1}$ удалением $(N+1)$ точек α_n. Тогда существует целое k_0 такое, что точка γ будет особой для $\psi(s)$ при любом $k \geqslant k_0$ (k входит в определение $\psi(s)$).

В остальных теоремах утверждается, что заключение теоремы 4 будет оставаться справедливым, если некоторые из условий заменим некоторыми другими условиями. *А. Ф. Леонтьев*

3992. Дополнения к теоремам Э. Ландау, М. Фекете и В. Бернштейна. Бламбер (Compléments à des théorèmes de E. Landau, M. Fekete et V. Bernstein. Blambert Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 20, 1207—1208 (франц.)

Даются дополнения к указанным в заголовке теоремам об особых точках функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле

$$f(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n},\ \lambda_n \uparrow \infty,\ s = \sigma + it,$$

имеющим конечную абсциссу сходимости σ_C'. Ландау показал, что если $a_n \geqslant 0$, то точка $s = \sigma_C'$ является особой для $f(s)$. Фекете обобщил этот результат, показав, что точка $s = \sigma_C'$ будет особой для $f(s)$ и тогда, когда $a_n = |a_n| e^{i\tau_n}$ и $|\tau_n| < \tau < \frac{\pi}{2}$ при $n > n_0$. В. Бернштейн получил следующую, в некоторых случаях еще более общую, теорему:

Пусть 1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0$; 2) $|\tau_n| < \tau$ или $|\pi - \tau_n| < \tau$ при $\tau < \frac{\pi}{2}$; 3) в ряду коэффициентов a_n перемена знака $\operatorname{Re}(a_n)$ происходит только между a_{n_ν} и $a_{n_\nu+1}$; 4) $D < \infty$, где D — максимальная плотность последовательности

$$\{\mu_\nu\},\ \mu_\nu = \frac{1}{2}(\lambda_{n_\nu} + \lambda_{n_\nu+1}).$$

Тогда $f(s)$ имеет, по крайней мере, одну особую точку на отрезке $|\operatorname{Im}(s)| \leqslant \pi D$ прямой сходимости (по поводу всех этих теорем см., например, Bernstein V., Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933, 80—86). Автор формулирует (без доказательства) следующую теорему:

Теорема 1. Пусть 1) $\{\lambda_n\}$ имеет плотность $D > 0$; 2) $G(z) = \prod\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_{n_\nu}^2}\right)$, где $\{\lambda_{n_\nu}\} \subset \{\lambda_n\}$ и имеет плотность Δ.

Если в интервале $|\operatorname{Im}(s - s_0)| < l$ своей прямой голоморфизма $\sigma = \sigma_H$ функция $f(s)$ регулярна, то тогда в интервале $|\operatorname{Im}(s - s_0)| < l - \pi\Delta$ той же прямой будет регулярной функция $\psi(s) = \sum a_n G(\lambda_n) e^{-s\lambda_n}$. Если $\Delta = 0$, функция $\psi(s)$ будет регулярной в каждой точке прямой $\sigma = \sigma_H$, в которой регулярна $f\{s\}$; если, кроме того, $\{\lambda_n\}$ имеет конечный индекс конденсации, то тогда всякая особая точка функции $f(s)$, полуизолированная на прямой голоморфизма (т. е. являющаяся концом некоторого интервала, в котором $f(s)$ регулярна), будет особой и для $\psi(s)$.

На основе этой теоремы непосредственно получаются следующие интересующие автора теоремы:

Теорема 2. Пусть 1) $\{\lambda_n\}$ имеет плотность $D > 0$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0$; 2) $\{\lambda_{n_\nu}\}$ имеет плотность Δ; 3) последовательность $\{a_m'\}$, дополняющая $\{a_{n_\nu}\}$ до $\{a_n\}$, удовлетворяет условию $|\arg a_m'| \leqslant \tau < \frac{\pi}{2}$; 4) перемена знака $\operatorname{Re}[a_m' G(\lambda_m')]$ происходит только при переходе от индекса m_ν к $m_\nu + 1$, D_μ — максимальная плотность $\{\mu_\nu\}$, где $\mu_\nu = \frac{1}{2}(\lambda_{m_\nu}' + \lambda_{m_\nu+1}')$. Тогда в интервале $|\operatorname{Im}(s)| \leqslant \pi(\Delta + D_\mu)$ прямой сходимости $\sigma = \sigma_C'$ имеется хоть одна особая точка $f(s)$.

Теорема 3. Заключение теоремы 2 остается справедливым, если условие 3) заменим условием: аргументы τ_m' коэффициентов a_m' удовлетворяют неравенству $|\tau_m'| \leqslant \tau$ или $|\pi - \tau_m'| \leqslant \tau$ при $\tau < \frac{\pi}{2}$.

Примечание референта. Для справедливости последней части теоремы 1 условие, что $\{\lambda_n\}$ имеет конечный индекс конденсации, является лишним (Леонтьев А. Ф., Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1951, **39**, стр. 99). *А. Ф. Леонтьев*

3993. О некоторых вопросах теории итерации рациональной функции. Таланов Д. И., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 3, 413—416

Исследуется структура итерационной последовательности, порожденной рациональной функцией. Автор основывается на свойствах множества F иррегулярных точек, введенного Фату (Fatou P., Bull. Soc. math. France, 1919, **47**, 161—271). Вводится понятие вытеснения точки z данным циклом. Доказывается, что подвижная иррегулярная точка вытесняется бесконечным множеством отталкивающих циклов и что множество членов итерационной последовательности, порожденной иррегулярной подвижной точкой, плотно в себе. На основании этого доказывается, что последовательность итераций рациональной функции либо первого, либо бесконечного класса. Вводится понятие p-кратной сходимости: последовательность называется p-кратно сходящейся к точке z, если z и только z есть частичный предел высшего класса p этой последовательности.

Доказывается, что к отталкивающей неподвижной точке p-кратно, при любом p, сходятся частичные последовательности итераций в иррегулярной подвижной точке. *С. П. Пулькин*

3994. О произведении конформных радиусов для системы непересекающихся областей. Ся Даосин (蹺於一組不相重疊的區域之照像半徑之積。夏道行), 數學學報, (Шусюэ сюэбао), 1953, 3, № 1, 1—7 (кит.)

В работе упрощается результат Г. М. Голузина (Матем. сб., 1951, 29, 454—460) о произведении конформных радиусов для системы непересекающихся областей.

Доказывается следующая теорема:

При заданных конечных различных a_k ($k=1,2,\ldots,n$) максимум величины $I=\prod_{k=1}^{n}|f_k'(0)|$ относительно всевозможных систем функций $z=f_k(\zeta)$, $f_k(0)=a_k$ ($k=1,2,\ldots,n$), регулярных в круге $|\zeta|<1$ и однолистно отображающих круг $|\zeta|<1$ на неналегающие друг на друга области, достигается для функций, отображающих $|\zeta|<1$ на области B_k с кусочно-аналитическими границами, причем $\overline{B}_k$ в своей совокупности покрывают всю плоскость z.

Существует аналитическая функция $z=f(\zeta)$, ветвями которой являются все экстремальные функции $z=f_k(\zeta)$, получающиеся из одной из них аналитическим продолжением через некоторые дуги окружности $|\zeta|=1$. Это продолжение осуществляется при помощи функционального уравнения

$$f_j(\zeta_j)=f_i\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right),\ |\zeta_j|>1.$$

Функция $z=f(\zeta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^2\frac{P(z)}{\prod_{\nu=1}^{n}(z-a_\nu)^2}=\frac{1}{\zeta^2}\ \text{для}\ |\zeta|<1,$$

где

$$P(z)=\prod_{\nu=1}^{n}(z-a_\nu)\cdot Q_{n-3}(z)+\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{n}(z-a_\nu)(a_k-a_\nu),$$

($Q_{n-3}(z)$ — полином, степень которого не превосходит $n-3$). *И. С. Очан*

3995. О метрических свойствах квазиконформного отображения. Белинский П. П., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 4, 589—590

Строятся примеры: 1) гомеоморфного конформного почти всюду отображения круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$, которое нельзя гомеоморфно продолжить на границу; 2) гомеоморфного конформного почти всюду отображения круга $|z|<1$ на круг $|w|\leqslant 1$, которое переводит граничное множество меры 0 в множество положительной меры. Эти примеры противоречат соответствующим утверждениям Пфлугера (Pfluger A., C. r. Acad. sci., 1948, 226, 623). Автор предлагает дополнительные условия, в которых утверждения Пфлугера становятся справедливыми (N-свойство почти на всех окружностях $|z|=r$, $r<1$, и вариации этого условия).

Приводится также уточненное и несколько дополненное утверждение Пфлугера о возможности продолжения гомеоморфизма на границу.

В неравенстве свойства 2° имеется опечатка: вместо $|z|=r$ следует читать $|z-z_0|=r$. *Б. В. Шабат*

3996 РЖ. Ядерная функция и конформное отображение. Бергман (The kernel function and conformal mapping. Bergman Stefan, VIII + 161 pp., New York, Amer. Math. Soc., 1950, 4.00 doll.) [Рецензия: Грунский (Grunsky), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1953, 56, № 2/3, ч. 2, 46—47 (нем.)]

3997 РЖ. Задачи по теории функций. Том 2. Кнопп (Problems in the advanced theory of functions. Vol. 2. Knopp Konrad, 138 pp., New York, Dover Publications, 2.50 doll.) [Рецензия: Топпинг (Topping J.) Brit. J. Appl. Phys., 1954, 5, № 1, 47 (англ.)]

3998 РЖ. Расположение критических точек аналитических и гармонических функций. Уолш (The location of critical points of analytic and harmonic functions. Walsh J. L., VIII + + 384 pp., ill., New York, Amer. Math. Soc., 1950, 6.00 doll.) [Рецензия: Ульрих (Ulrich E.), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1953, 56, № 2/3, ч. 2, 46 (нем.)]

См. также: 4031

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3999. Построение явного решения бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Камынин Л. И., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 3, 397—400

Дается решение, удовлетворяющее начальным условиям $U_n(0)=\varphi(n)$, счетной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dU_n}{dt}=\sum_{\alpha=-r}^{r}C_\alpha U_{n+\alpha},\ n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots,$$

с постоянными коэффициентами в виде

$$U_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi(n+k)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikz} \times$$

$$\times \exp\left\{ t \sum_{\alpha=-r}^{r} C_\alpha e^{i\alpha z} \right\} dz + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n-k)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikz} \times$$

$$\times \exp\left\{ t \sum_{\alpha=-r}^{r} C_\alpha e^{i\alpha z} \right\} dz,$$

если функция $\varphi(n)$ удовлетворяет условию

$$|\varphi(n)| \leqslant L\left[(1-\varepsilon)^{\frac{|n|}{r}}\right]!$$

где $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $L > 0$ — постоянные.

Важно отметить, что единственность решения может быть установлена лишь в классе функций $V_n(t)$, рост которых не слишком велик.

В работе строится пример системы, имеющей не единственное решение. Аналогичная формула для решений приводится и для неоднородной системы уравнений. *М. Я. Ятаев*

4000. Общие канонические преобразования. Манд (Transformations canoniques générales. Mendes Marcel), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 5, 457—458 (франц.)

Устанавливается следующее предложение: Для того чтобы преобразование

$$(q, p, t) \to (Q, P, T),$$

примененное к системе

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

было каноническим, т. е. переводило бы ее в каноническую, необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$\omega = \sum_i (\lambda P_i \delta Q_i - p_i \delta q_i) + H\delta\tau$$

было полным дифференциалом (при T постоянном).

Далее автор указывает, что тем же методом предыдущее предложение можно обобщить на систему в полных дифференциалах

$$dq_i = \sum_k \frac{\partial H_k}{\partial p_i} dt, \quad dp_i = -\sum_k \frac{\partial H_k}{\partial q_i} dt_k,$$

где $H_k = H_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t_1, t_2, \ldots, t_s)$ и независимыми переменными являются $t_1, t_2, \ldots, t_s$. *А. К. Никитин*

4001. Об интервале существования решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Лозинский С. М., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 1, 17—19

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_\nu}{dt} = f_\nu(t, y_1, \ldots, y_n), \quad \nu = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где вещественные функции f_ν непрерывны вместе с первыми производными $f_{\nu\mu}(t, \mathbf{y}) = \partial f_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)/\partial y_\mu$ в некоторой области G. Пусть $\mathbf{Y}(t) = \{Y_1(t), \ldots, Y_n(t)\}$ — вещественная вектор-функция класса C', определенная при $t \in [t_0, T]$ и такая, что кривая $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$ лежит в некоторой области $G^* \subset G$. Пусть задана точка $(t_0, y^0) \in G^*$.

Предполагается, что дана матрица $U(t)$ класса C' на $[t_0, T]$, неособенная при каждом $t \in [t_0, T]$. Пусть $J[t, \mathbf{y}]$, $Q[t, \mathbf{y}]$ — матрицы, определенные формулами

$$\{J[t, \mathbf{y}]\}_{\nu\mu} \equiv f_{\nu\mu}(t, \mathbf{y}),$$

$$Q[t, \mathbf{y}] \equiv U^{-1}(t) J[t, \mathbf{y}] U(t) - U^{-1}(t) dU(t)/dt.$$

Пусть векторы $\vec{\tau}(t)$, $\vec{\zeta}(t)$, $\vec{\vartheta}^0$ определены равенствами

$$\tau_\nu(t) = \frac{dY_\nu(t)}{dt} - f_\nu[t, \mathbf{Y}(t)],$$

$$\vec{\zeta}(t) = U^{-1}(t)\vec{\tau}(t), \quad \vec{\vartheta}^0 = U^{-1}(t_0)(\mathbf{Y}(t_0) - \mathbf{y}^0).$$

Теорема 1. Пусть вещественная матрица $A(t)$ непрерывна при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и удовлетворяет условиям

$$\mathrm{Re}\{Q[t, \mathbf{y}]\}_{\nu\nu} \leqslant \{A(t)\}_{\nu\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

$$|\{Q[t, \mathbf{y}]\}_{\nu\mu}| \leqslant \{A(t)\}_{\nu\mu}, \quad \nu \neq \mu, \quad \nu, \mu = 1, \ldots, n,$$

при $t \in [t_0, T]$, $(t, \mathbf{y}) \in G^*$. Пусть $\varepsilon(t)$ есть решение системы

$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = A(t)\vec{\varepsilon} + |\vec{\zeta}(t)|$$

такое, что $|\vec{\vartheta}^0| \leqslant \vec{\varepsilon}(t_0)$ (неравенство для векторов всюду понимается как неравенство для соответствующих компонент векторов). Если область G^* содержит все точки $(t, \mathbf{y})$, для которых

$$t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad |\mathbf{y} - \mathbf{Y}(t)| \leqslant |U(t)|\vec{\varepsilon}(t),$$

то решение $\mathbf{y}(t)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$, существует при $t \in [t_0, T]$ и

$$|\mathbf{y}(t) - \mathbf{Y}(t)| \leqslant |U(t)|\vec{\varepsilon}(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

В остальных трех теоремах статьи также указываются условия существования при $t \in [t_0, T]$ решения $\mathbf{y}(t)$ системы (1), удовлетворяющего начальному условию $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$. Эти условия заключаются в том, что $(t, \mathbf{y}) \in G^*$ для всех таких $(t, \mathbf{y})$, для которых

$$t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{Y}(t)\| \leqslant \Phi(t).$$

В каждой из теорем указывается, как конструируется функция $\Phi(t)$; норма $\|\mathbf{y} - \mathbf{Y}(t)\|$ в каждой теореме понимается в другом смысле.

Содержание статьи представляет собой продолжение исследований автора по системам обыкновенных дифференциальных уравнений (РЖМат, 1954, 2342, 3074). *М. А. Красносельский*

4002. О функциональном уравнении $dy/dx = f(x, y(x), y(x+h))$, $h > 0$. Досс, Наср (On the functional equation $dy/dx = f(x, y(x), y(x+h))$, $h > 0$. Doss Shafik, Nasr Saad K.), Amer. J. Math., 1953, 75, № 4, 713—716 (англ.)

Пусть при $x_0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$ $|f(x, Y, Z) - f(x, y, z)| \leqslant K_1(x)|Y-y| + K_2(x)|Z-z|$, $B = \int_{x_0}^{\infty} [K_1(x) + K_2(x)]\,dx < 1$, $\int_{x_0}^{\infty} |f(x, y, z)|\,dx < \infty$. Тогда на участке $x_0 \leqslant x < \infty$ существует, и притом единственное, ограниченное решение уравнения, приведенного в заглавии статьи, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ (при этом надо требовать, чего не сделано в работе, непрерывности функции f. *Прим. реф.*). Доказательство весьма элементарное и основано на обычном методе последовательных приближений. Пример показывает существенность требования сходимости интеграла B. Приводятся простые свойства зависимости решения от y_0. Для линейных уравнений аналогично доказывается более общее утверждение: если $\int_{x_0}^{\infty} |K(x, t)|\,dt \leqslant C < 1$, то уравнение

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{\infty} K(x, t)\, y(t)\, dt \quad (x_0 \leqslant x < \infty)$$

имеет ограниченное на участке $[x_0, \infty]$ решение и притом единственное.

Первое из неравенств (5) статьи обосновано недостаточно. *А. Д. Мышкис*

4003. Об оценках для асимптотических разложений решений уравнения 2-го порядка, содержащих параметр. Воровича И. И., Уч. зап. Ростовского ун-та, Тр. физ.-матем. фак-та, 1953, № 3, 107—116

Рассматривается уравнение

$$y'' + \varkappa^2 p^2 y = 0, \qquad (1)$$

где $p^2 = \left[p_0^2 + \frac{p_1}{\varkappa} + \frac{p_2}{\varkappa^2} + \ldots + \frac{p_k}{\varkappa^k}\right]$, причем $p_0, p_1, \ldots, p_k$ — функции переменного x, дифференцируемые требуемое количество раз; $\varkappa$ — вещественный параметр, предполагаемый достаточно большим. Предполагается, что $p_0(x) \neq 0$ на рассматриваемом отрезке изменения x. Строится асимптотическое разложение решения уравнения (1) по параметру $\varkappa$ в виде

$$y = \exp\left\{\int_0^x \lambda\, ds\right\},$$

где

$$\lambda = \sum_{m=-1}^{\infty} \lambda_m \varkappa^{-m}. \qquad (2)$$

В работе В. С. Пугачева (Прикл. матем. и механика, 1942, 6, 203—208) оценивается погрешность, получающаяся при использовании первых членов асимптотических разложений. В реферируемой статье оценивается погрешность при использовании произвольной частной суммы ряда (2).

Далее изучается неоднородное уравнение

$$y'' + \varkappa^2 p^2 y = f(\varkappa, x), \qquad (3)$$

где $f(\varkappa, x) = \varkappa^2 f_{-2}(x) + \varkappa f_{-1}(x) + \ldots$ Решение уравнения (3) ищется в виде асимптотического ряда $y = y_0 + \frac{y_1}{\varkappa} + \ldots$ Для $y_0, y_1, \ldots$ получаются уравнения

$$\begin{aligned} p_0^2 y_0 &= f_{-2}, \\ p_0^2 y_1 + p_1 y_0 &= f_{-1}, \\ p_0^2 y_2 + p_1 y_1 + p_2 y_0 + y_0'' &= f_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (4)$$

Затем оценивается разность $\varepsilon = y - \bar{y}$, где $\bar{y} = \sum_{s=0}^{n+1} y_s \varkappa^{-s}$, а y — решение уравнения (3).

Чтение затруднено огромным количеством опечаток в формулах (не менее 15). Укажем наиболее существенные: на стр. 108, 5-я строка сверху, вместо $p(0)$ следует читать $p(x)$; стр. 108, тринадцатая строка сверху, вместо $|v| \leqslant \frac{p(v)}{p(x)}$ следует читать $|y| \leqslant \frac{p(0)}{p(x)}$; на стр. 110 выражение для функции Грина следует читать

$$G(x, s) = \frac{\left(\exp\int_s^x a\,du\right)\sin\int_s^x b\,du}{b(s)};$$

на стр. 112, 3-я строка сверху, вместо

$$\int_0^x \left|\frac{Bb - Ca}{b} - \frac{d}{ds}\left(\frac{GC}{b}\right)\right| ds$$

следует читать

$$\int_0^x \left|\frac{G(Bb - Ca)}{b} - \frac{d}{ds}\left(\frac{GC}{b}\right)\right| ds.$$

Кроме того, исходное уравнение (1) в начале записано в виде $y'' + p^2 y = 0$, где $p^2 = \varkappa^2\left\{p_0^2 + \frac{p_1}{\varkappa} + \ldots\right\}$, а впоследствии это уравнение используется в виде $y'' + \varkappa^2 p^2 = 0$, где $p^2 = p_0^2 + \frac{p_1}{\varkappa} + \frac{p_2}{\varkappa^2} + \ldots$

В статье рассмотрено несколько примеров: строится оценка погрешности для уравнения $y'' + \left\{\varkappa^2 + \frac{1}{4(x+2)}\right\} y = 0$, исследуется уравнение $y'' + 4t^2 e^{-10^{-3}(t-5)^2} y = 0$ $(s \leqslant t \leqslant 70)$, показывается применение развитых методов к определению собственных значений уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при закрепленных концах, а также исследуется уравнение продольного изгиба конического стержня. *В. М. Волосов*

4004. Об устойчивости решения одной нелинейной системы уравнений. Шиманов С. Н., Успехи матем. наук, 1953, 8, № 6 (58), 155—157

Рассматривается система

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+f_1(x,\,y,\,\dot{x},\,\dot{y})\dot{x}+\varphi(x)=0\,,\\ \ddot{y}+f_2(x,\,y,\,\dot{x},\,\dot{y})\dot{x}+\psi(y)=0\,,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где f_1, f_2, φ и ψ всюду непрерывны и обеспечивают единственность решения в пространстве $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Доказывается теорема:

Если выполнены условия

$$\varphi(0)=\psi(0)=0;\qquad(2)$$

$$x\varphi(x)>0 \text{ при } x\neq 0,\ y\psi(y)>0 \text{ при } y\neq 0,\qquad(3)$$

$$f_1(x,\,y,\,\dot{x},\,\dot{y})>0,\ f_2(x,\,y,\,\dot{x},\,\dot{y})>0\,,\qquad(4)$$

$$\int_0^x \varphi(x)\,dx\to\infty \text{ при } |x|\to\infty,$$

$$\int_0^y \psi(y)\,dy\to\infty \text{ при } |y|\to\infty,\qquad(5)$$

то решение $x=y=0$ системы (1) будет асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

В случае, если условия (4) справедливы в данной области пространства $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, содержащей начало координат, указывается соответствующая область пространства, в которой заведомо имеет место асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1). Выводы легко распространяются на систему n уравнений, аналогичную системе (1).

В работе существенно используются результаты Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского (Докл. АН СССР, 1952, **86**, № 3, 453—456). *А. В. Драгилев*

4005. Качественное исследование системы двух линейных однородных уравнений первого порядка. Е л ь ш и н М. И., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 1, 5—8

1. Рассматривается однородная система двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{i1}(t)\,x_1+a_{i2}(t)\,x_2\quad(i=1,\,2)\,,\qquad(1)$$

где $a_{ij}=a_{ij}(t)$ $(i,\,j=1,\,2)$ непрерывны на конечном или бесконечном интервале (a, b). Решение системы (1) представляется в виде

$$x_i=u_i(t)\exp\int_{t_0}^{t}a_{ii}(\xi)\,d\xi\quad(i=1,\,2),\qquad(2)$$

где гладкие функции $u_i=u_i(t)$ $(i=1,2)$ постоянны на сегментах $[a_{ik}(t)\equiv 0]$ $(k\neq i)$ и удовлетворяют уравнениям вида

$$\frac{d^2u_i}{d\tau_i^2}+p_i(\tau_i)\frac{du_i}{d\tau_i}+q_i(\tau_i)\,u_i=0\qquad(3)$$

на интервалах $(a_{ik}(t)\neq 0)$, причем

$$\tau_i=\tau_i(t)\equiv\int_{t_0}^{t}a_{ik}(\xi)\,d\xi\quad(k\neq i;\ i=1,\,2)\qquad(4)$$

и коэффициенты $p_i(\tau_i)$, $q_i(\tau_i)$ непрерывны и эффективно выражаются через коэффициенты $a_{ij}(t)$. Полагая

$$u_i=w_i\exp\int_0^{\tau_i}\left[\theta_i(\xi)-\frac{1}{2}\,p_i(\xi)\right]d\xi,$$

где $\theta_i=\theta_i(\tau_i)$ $(i=1,2)$ — произвольные функции, удовлетворяющие известным условиям гладкости, уравнение (2) можно приводить к различным видам, более удобным для дальнейшего исследования, причем основную роль здесь играют коэффициенты при w_i в преобразованных уравнениях:

$$J_i[\theta_i]=[\theta_i(\tau_i)-\frac{1}{2}\,p_i(\tau_i)]'+\theta_i^2(\tau_i)-$$
$$-\frac{1}{4}\,p_i^2(\tau_i)+q_i(\tau_i)\,.\qquad(5)$$

В частности, могут быть получены следующие представления:

$$u_i(t)=c_i\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}a_{ik}(\xi)\,F_i(\tau_i(\xi))\,d\xi\right\}\times\qquad(6)$$

$$\times\cos\left\{\int_{t_0}^{t}a_{ik}(\xi)\,\omega_i(\tau_i(\xi))\,d\xi+c_i'\right\}\quad(i=1,2;\ k\neq i),$$

где $\omega_i(\tau_i(\xi))$ — гладкие функции, обращающиеся в нуль лишь одновременно с $a_{ik}(\xi)$;

$$F_i(\tau_i)=-p_i(\tau_i)-\frac{\omega_i'(\tau_i)}{\omega_i(\tau_i)}$$

(в интервалах $(a_{ik}(t)\equiv 0)$ функция $F_i(\tau_i)$ доопределяется по непрерывности) и постоянные c_2, c_2' выражаются определенным образом через постоянные c_1 и c_1'. Формулы (6) обобщают аналогичные результаты других авторов (Milne W. E., Trans. Amer. Math. Soc., 1928, **30**, 797; Milloux H., Praces mat.-fiz., 1934, **41**, 39—54).

2. В частном случае, если $a_{ik}(t)\neq 0$ $(k\neq i)$ при $a<t<b$, автор, исходя из формул (2), (3), (4) и используя свои прежние результаты (Докл. АН СССР, 1949, **68**, № 5, 813—816; **69**, № 1, 7—10), формулирует, при помощи некоторых постулированных свойств операторов $J_i[\theta_i]$ $(i=1,\,2)$, необходимые и достаточные условия наличия неколеблемых и колеблемых решений $x_i=x_i(t)$ $(i=1,\,2)$ (2). В приведенных формулах содержатся неточности, связанные с неаккуратным переходом от переменной t к переменным τ_i.

В заключение указываются некоторые возможности качественного исследования системы (1) при помощи полярных координат. *Б. П. Демидович*

4006. О периодических решениях канонической системы дифференциальных уравнений. М о з е р (Über periodische Lösungen kanonischer Differentialgleichungssysteme. M o s e r J ü r g e n), Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. IIa, 1953, № 3, 23—48. (нем.)

1. Изучается поведение решений канонической системы дифференциальных уравнений с двумя степенями свободы:

$$\dot{x}_k = H_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -H_{x_k} \quad (k = 1, 2) \qquad (1)$$

($H = H(x, y)$ — достаточно гладкая функция, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$) в относительной окрестности простого периодического решения $\mathfrak{P}$, расположенной на гиперповерхности $H = H_0$, проходящей через кривую $\mathfrak{P}$.

2. Пусть существует независящий от H положительно определенный первый интеграл $G = G_0$, обращающийся в нуль только на $\mathfrak{P}$ («интегрируемый случай»). Поверхности $H = H_0$, $G = G_0$, при достаточно малых $G_0 > 0$, представляют собой торы, заключающие внутри себя кривую $\mathfrak{P}$. Введя новые переменные: α — угловую координату на $\mathfrak{P}$ по модулю 1, u и v, функцию G можно привести к виду $G = u^2 + v^2$, причем система (1) принимает нормальную форму:

$$\frac{du}{d\alpha} = -2\pi\lambda v, \quad \frac{dv}{d\alpha} = 2\pi\lambda u, \qquad (2)$$

где $\lambda = \lambda(G)$ — функция, инвариантная относительно невырожденной замены переменных. Отсюда

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cos 2\pi\lambda\alpha - v_0 \sin 2\pi\lambda\alpha, \\ v &= u_0 \sin 2\pi\lambda\alpha + v_0 \cos 2\pi\lambda\alpha \end{aligned} \qquad (3)$$

(в тексте (стр. 25) вместо v написано u). Функция $\lambda = \lambda(G)$ («число вращения») может быть вычислена без интегрирования системы (1) и полностью характеризует поведение интегральных кривых этой системы вблизи кривой $\mathfrak{P}$. Если $\lambda = \frac{l}{k}$, где k и l — взаимно простые целые числа и $k \geqslant 1$, то все соответствующие интегральные кривые замкнуты и пересекают поверхность $\alpha \equiv 0 \pmod 1$ ровно k раз. Если $G(\lambda)$ непостоянна, то в достаточно малой относительной окрестности периодического решения $\mathfrak{P}$ существует всюду плотное множество периодических решений. Для этой теории, как показано на примере, существенна каноничность системы. Метод доказательства сводился к изучению поведения решений некоторой системы

$$\dot{\alpha} = f(\alpha, \beta), \quad \dot{\beta} = g(\alpha, \beta)$$

на поверхности тора $H = H_0$, $G = G_0$ ($f(\alpha, \beta)$ и $g(\alpha, \beta)$ — периодические функции периода 1). Эта задача рассматривалась Пуанкаре, Данжуа и др. В последнее время новые результаты получены также А. Н. Колмогоровым (Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 5, 763—766). Результаты автора примыкают к известным исследованиям Г. Биркгофа по системам с двумя степенями свободы (Acta math., 1920, **43**, 1—119; Динамические системы, ОГИЗ, М.—Л., 1941), который, в отличие от данной работы, использовал метод формальных разложений в степенные ряды.

3. В общем случае исследуется лишь система (1), мало отличающаяся от интегрируемой. Предполагая, что $H = H(x, y, \mu)$, где μ — действительный параметр, причем при $\mu = 0$ получается интегрируемая система с инвариантной функцией $\lambda = \lambda(G)$ и $\frac{d\lambda}{dG} \neq 0$ при $0 < G < G_0$, автор доказывает, что для каждого достаточно большого натурального числа k при любом $|\mu| < \mu_k$ существует периодическое решение соответствующей системы (1), пересекающее поверхность $\alpha \equiv 0 \pmod 1$ не менее k раз. В качестве примера рассматривается ограниченная задача трех тел.

Для систем с одной степенью свободы аналогичная задача, в несколько иных предположениях, была решена Л. С. Понтрягиным (Phys. Z. der Sowjetunion, 1934, **6**, № 1—2, 25—28).

Б. П. Демидович

4007. Исследование устойчивости нелинейных периодических колебаний. Х а я с и (Stability investigation of the nonlinear periodic oscillations H a y a s h i C h i h i r o), J. Appl. Phys., (N. Y.) 1953, **24**, № 3, 344—348 (англ.)

Изучение устойчивости периодического решения уравнения

$$\ddot{v} + f(v)\frac{\partial v}{\partial t} + g(v) = e(T), \; e(t+T) = e(t), \qquad (1)$$

сводится (если каким-либо способом найден тригонометрический ряд, представляющий периодическое решение) к вычислению характеристических показателей уравнения типа Хилла. Формально применяя к уравнению

$$d^2\eta / dt^2 + \left[\theta_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\theta_\nu \cos(2\nu t - \varepsilon_\nu)\right]\eta = 0 \qquad (2)$$

метод Уиттекера для вычисления характеристических показателей (представление решения в виде $e^{\mu t}[\sin(nt - \sigma) + \cdots]$ в n-й «области неустойчивости»), автор получает «в первом приближении» для характеристических показателей следующие выражения:

$$\mu^2 = -(\theta_0 + n^2) \pm (4n^2\theta_0 + \theta_n^2)^{\frac{1}{2}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (3)$$

(в приложении даны «вторые приближения» для $n = 1$, 2 и 3). Используя равенства (3), автор получает для уравнения

$$\ddot{v} + 2\delta\dot{v} + f(v) = e(t), \qquad (4)$$

где $e(t)$ периодична, следующие условия устойчивости периодического решения:

$$(\theta_0 - n^2)^2 + 2(\theta_0 + n^2)\delta^2 + \delta^4 > \theta_n^2, \; n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (5)$$

Здесь θ_0, θ_1, θ_2, ... определяются из равенства

$$\frac{df}{dv} - \delta^2 = \theta_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\theta_\nu \cos(2\nu t - \varepsilon_\nu).$$

Утверждение автора, что условие (5) при $n = 1$ совпадает с одним из условий устойчивости периодического решения периода 2π уравнения $\ddot{v} + v = \lambda f(v, \dot{v}) + A\cos mt$ (m — целое, λ — малый параметр), данных Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси (Мандельштам Л. И., Полное собрание трудов т. II, Изд. АН СССР, статьи 32 и 33), в общем случае неверно.

В заключение автор указывает без доказательств на физический смысл условий устойчивости (5) при

различных n. Работа не содержит удовлетворительного математического истолкования формальных операций и полученных результатов.

А. В. Драгилев

4008. Об одном методе вычисления характеристических показателей одного дифференциального уравнения типа Хилла. Шефке (Eine Methode zur Berechnung des charakteristischen Exponenten einer Hillschen Differentialgleichung. Schäfke Friedrich Wilhelm), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 8—9, 279—280 (нем).

Дается метод нахождения характеристических показателей решений уравнения Матье $y''+(\lambda-2h^2\cos 2t)\,y(t)=0$ при любом λ, если известны собственные значения λ, т. е. те значения, при которых уравнение Матье имеет периодические и полупериодические решения. Используется доказанное автором ранее соотношение между искомым характеристическим показателем ν и параметром λ: $\cos\pi\nu=f(\lambda)$, причем существенно, что $f(\lambda)$ — целая функция порядка 1/2. Если обозначить через λ_{ν_0+2r} корни уравнения $f(\lambda)-\cos\pi\nu_0=0$, то можно воспользоваться разложением целой функции $f(\lambda)-\cos\pi\nu_0$ в бесконечное произведение, которое принимает простой вид (по теореме Адамара), так как функция $f(\lambda)$ целая порядка 1/2. Именно, имеем

$$\frac{\cos\pi\nu-\cos\pi\nu_0}{\cos\pi\nu_1-\cos\pi\nu_0}=\prod_{r=-\infty}^{r=+\infty}\frac{\lambda-\lambda_{\nu_0+2r}(h^2)}{\lambda_1-\lambda_{\nu_0+2r}(h^2)}\cdot \qquad (1)$$

Если учесть в этом соотношении асимптотическую формулу

$$\lambda_{\nu_0+2r}(h^2)=(\nu_0+2r)^2+O(r^{-2}),$$

то равенство (1) дает возможность вычислять значения ν, зная значения λ. Если положим $\nu_0=0$ и $\nu_0=1$, то λ_{ν_0+2r} превратятся в собственные значения уравнения Матье. *В. В. Немыцкий*

4009. Замечание о задаче Коши. Хилле (A note on Cauchy's problem. Hille Einar), Roczn. Polskiego towarz. mat., 1952, **25**, 56—68 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Развиваются и обобщаются идеи, содержащиеся в книге автора «Функциональный анализ и полугруппы» (Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951, гл. 20); при этом необходимые определения и свойства полугрупп воспроизводятся. При помощи аппарата функционального анализа и преобразования Лапласа абстрактных функций получается следующий основной результат.

Пусть U — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $D[U]$ в комплексном банаховом пространстве Y. Пусть для $\lambda>\lambda_0\geqslant 0$ существует резольвента $R(\lambda;U)$, причем $\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\,\lambda\,\|R(\lambda;U)\|<\infty$. Тогда для любого $y_0\in Y$ существует не более одного абсолютно непрерывного дифференцируемого решения $y(t)$ $(0\leqslant t<\infty,\ y\in Y)$ задачи Коши

$$y'(t)=U[y(t)]\ (0<t<\infty),\ y(0)=y_0, \qquad (1)$$

удовлетворяющего неравенству $\overline{\lim_{t\to\infty}}\,t^{-1}\ln\|y(t)\|<\infty$. Существование решения $y(t)=y(t;y_0)$, удовлетворяющего дополнительному требованию

$$\|y(t;y_0)\|\leqslant M\|y_0\|e^{\omega t}\ (0\leqslant t<\infty), \qquad (2)$$

удается доказать, если U ограничен (тогда $y(t;y_0)=\exp(tU)[y_0]$) или если U — бесконечно малый производящий оператор полугруппы линейных ограниченных операторов $T(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$, для которой $\|T(t)\,y-y\|\underset{t\to 0}{\to}0$, $\overline{\lim_{t\to\infty}}\,t^{-1}\|T(t)\|<\infty$ (тогда $y(t;y_0)=T(t)\,y_0$, $y_0\in D[U]$). Обратно, из разрешимости задачи Коши (1) $(y_0\in D[U])$ при условии (2) следует, что U — производящий оператор такой полугруппы. В качестве примеров рассмотрена задача Коши для уравнений колебаний струны, теплопроводности и Лапласа; в последнем случае становится ясной причина некорректности постановки задачи, но при некоторой модификации рассуждений удается получить формулу Пуассона для полуплоскости.

По поводу более общего уравнения $y^{(n)}(t)=U^n[y(t)]$ см. статью автора (РЖМат, 1953, 811). Близкие вопросы рассматривал З. И. Халилов (Докл. АН СССР, 1952, **85**, № 5, 959—962).

А. Д. Мышкис

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

4010. Нелинейные уравнения гиперболического типа. Лакс (Nonlinear hyperbolic equations. Lax Peter D.), Communs Pure and Appl. Math., 1953, **6**, № 2, 231—258 (англ.)

Изучается задача Коши для квазилинейной гиперболической системы дифференциальных уравнений с частными производными по двум независимым переменным вида

$$U_y=A(x,\,y,\,U)\,U_x+C(x,\,y,\,U), \qquad (1)$$

где $U(x,\,y)$ и $C(x,\,y,\,U)$ — векторы с n компонентами, $A(x,\,y,\,U)$ — матрица. Основным результатом работы является следующая теорема:

Пусть гиперболическая система (1) аналитична в $(n+2)$-мерной области E пространства $(x,\,y,\,U)$, содержащей линию $(x,\,0,\,\Phi(x))$, и пусть $U(x,\,y)$ — аналитическое решение этой системы, удовлетворяющее начальному условию $U(x,\,0)=\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — вектор с аналитическими компонентами. Решение $U(x,\,y)$ предполагается определенным в некоторой области S, обладающей тем свойством, что любую точку из S можно соединить дугой характеристики (каждого из семейств характеристик системы (1)), целиком принадлежащей S, с отрезком оси x, где заданы начальные условия. Если замыкание множества точек $(x,\,y,\,U(x,\,y))$ при $(x,\,y)\subset S$ содержится внутри E и частные производные U_x ограничены в S, то решение $U(x,\,y)$ может быть аналитически продолжено на некоторую область, содержащую S.

Эта теорема используется для исследования задачи Коши системы (1) с неаналитическими коэффициентами и неаналитическими начальными функциями. Если A, C, Φ, T (T — матрица такая, что $T^{-1}AT$ — диагональная матрица) имеют непрерывные производные 1-го порядка по всем аргументам, удовлетворяющие условию Липшица в некоторой области E пространства $(x,\,y,\,U)$, то

решение системы (1) с начальным условием $U(x, 0) = \Phi(x)$ может быть получено как предел равномерно сходящейся последовательности решений задачи Коши систем вида (1), у которых A, C и Φ аналитичны и аппроксимируют соответствующие функции рассматриваемой системы. Полученное таким образом решение задачи Коши для системы (1) имеет непрерывные частные производные 1-го порядка. Существование решения задачи Коши системы (1) при таких предположениях относительно A, C, Φ было ранее доказано Дуглисом (Douglis, Communs Pure and Appl. Math., 1952, 5, 119—154). Пользуясь аппроксимациями функций аналитическими функциями, автор получает некоторые обобщения этого результата. Если A, C, T удовлетворяют условию Липшица в некоторой области E, содержащей линию $(x, 0, \Phi(x))$, причем $\Phi(x)$ также удовлетворяет условию Липшица, то последовательность решений аппроксимирующих аналитических систем с аналитическими начальными условиями равномерно сходится в некоторой области к функции, которую автор называет обобщенным решением задачи Коши системы (1) с начальным условием $U(x, 0) = \Phi(x)$. Если A, C, T имеют непрерывные производные 1-го порядка, а $\Phi(x)$ удовлетворяет условию Липшица и имеет непрерывную производную почти всюду, то обобщенное решение задачи Коши имеет непрерывные производные и удовлетворяет системе во всех регулярных точках. При этом точка называется регулярной, если ее можно соединить дугами каждого семейства характеристик обобщенного решения системы (1), соответствующего начальному условию $U(0, x) = \Phi(x)$, с теми из точек отрезка оси x (где заданы начальные условия), в которых компоненты $\Phi'(x)$ непрерывны.

О. А. Олейник

4011. Метод разложения для дифференциальных уравнений параболического типа. Грин (An expansion method for parabolic partial differential equations. Green J. W.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, **51**, № 3, 127—132 (англ.)

В области $S: 0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$ рассматривается решение уравнения

$$L(u) \equiv u_{xx} - u_t - gu = f \qquad (1)$$

при условиях

$$u(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \qquad (2)$$

причем функции f и g считаются непрерывными и имеющими непрерывные частные производные.

Доказывается единственность решения в классе функций, непрерывных вместе с входящими в (1) производными. Решение ищется как предел последовательности приближенных решений вида

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^{n} C_{n,k}(t) \sin kx,$$

которые определяются из условий

$$\int_0^\pi \{L(u_n) - f\} \sin kx\, dx = 0, \quad k = 1, \ldots n,$$

$$C_{n,k}(0) = 0.$$

Доказывается, что последовательность $u_n(x, t)$ равномерно стремится в S_T ($S_T: 0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant t \leqslant T$) к функции $u(x, t)$, решающей задачу (1), (2). Кроме того, $u_{n,x} \to u_t$, $u_{nt} \to u_t$ равномерно в S_T и

$$\int_0^\pi \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_n - u)\right\}^2 dx \to 0.$$

В работе даются также следующие оценки погрешности приближенного решения:

$$\int_0^\pi (u_n - u)^2\, dx \quad t^2 F_n^2(t),$$

$$|u_n(x, t) - u(x, t)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi} x(\pi - x)}\, G_n(t),$$

где $F_n(t) = \max\limits_{\tau \leqslant t} \sqrt{\int_0^\pi \{f_n - f\}^2 dx}$, $f_n = L(u_n)$,

$$G_n(t) = tF_n(t)\{F_n(t) + F_n(0) + tH_n(t)\},$$

$$H_n^2(t) = G_1(t)\, t^2 F_n^2(t) + 2G_1(t)\, tF_n(t) + F_{1n}^2(t) + F_{1n}(t),$$

$$G_1(t) = \max_{\tau \leqslant t} |g_t(x, t)|,$$

$$F_{1n}(t) = \max_{\tau \leqslant t} \sqrt{\int_0^\pi \{f_{n,t}(x, \tau) - f_t(x, \tau)\}^2 dx}.$$

В. П. Ильин

4012. Задача о собственных значениях для самосопряженного эллиптического оператора в частных производных с переменными коэффициентами. Браудер (Le problème des vibrations pour un opérateur aux dérivées partielles self-adjoint et du type elliptique, à coefficients variables. Browder Félix), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 22, 2140—2142 (франц.)

Рассматривается задача о собственных значениях для эллиптического самосопряженного дифференциального оператора порядка $2m$:

$$Ku = \sum_{\substack{i_1 \ldots i_j \\ j \leqslant 2m}} a_{i_1 \ldots i_j}(x)\, u_{i_1 \ldots i_j}(x),$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, при нулевых граничных условиях, понимаемых в вариационном смысле. Пусть $\{\varphi_i\}$ — ортонормированные в $L^2(D)$ собственные функции оператора $(-1)^m K$, упорядоченные по неубыванию значений λ_i. Тогда, если $2m > n$ и

$$\rho(x) = \int_{a(x, \xi) < 1} d\xi, \text{ где } a(x, \xi) =$$

$$= \sum_{i_1 \ldots i_{2m}} a_{i_1 \ldots i_{2m}}(x)\, \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_{2m}},$$

то при $t \to \infty$

$$N(t) = \sum_{\lambda_i \leqslant t} 1 = t^{\frac{n}{2m}} \left\{(2\pi)^{-n} \int_D \rho(z)\, dz + o(1)\right\},$$

$$\sum_{\lambda i \leqslant t} \overline{\varphi_i}(x)\, \varphi_j(y) = t^{\frac{n}{2m}} \{\delta_{xy}(2\pi)^{-n} \rho(x) + o(1)\},$$

$$\text{где } \delta_{xy} = \begin{cases} 1 \text{ при } x = y, \\ 0 \text{ при } x \neq y. \end{cases}$$

Доказательство ведется методом Карлемана.

М. И. Вишик

4013. Об одной особой задаче теории потенциала. Шерман Д. И., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 1, 25—28

Пусть в плоскости $z = x + iy$ задана конечная односвязная область S, ограниченная гладким замкнутым контуром L. Рассматривается задача об отыскании гармонических в области S и непрерывных в $S + L$ вместе со своими производными 1-го порядка функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, удовлетворяющих на L граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + a_{11}(s)\, u + a_{12}(s)\, v = f_1(s), \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + a_{21}(s)\, u + a_{22}(s)\, v = f_2(s), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $a_{kj}(s)$, $f_j(s)$ — заданные на L вещественные достаточно гладкие функции длины дуги s.

При допущении, что функции

$$a(s) = a_{11}(s) + a_{22}(s), \quad b(s) = a_{21}(s) - a_{12}(s)$$

одновременно не обращаются в нуль на L, задача (1) приводится посредством некоторых, специально подобранных, потенциалов для $u(x, y)$ и $v(x, y)$ к системе (вообще говоря, не эквивалентных задаче) интегральных уравнений Фредгольма относительно двух вещественных функций.

Автор рассматривает также и тот случай, когда $a(s)$, $b(s)$ могут обращаться в нуль на контуре. В этом случае потенциалы для u и v, позволяющие свести задачу к уравнению Фредгольма, допускают на границе области особенность порядка больше единицы.

Как указывает сам автор, вопрос о возможности представления произвольных гармонических функций в виде используемых им потенциалов остается открытым.

А. И. Каландия

4014. Обобщение уравнения Эйлера — Дарбу с целыми коэффициентами. Гриб А. А., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 6, 953—956

Рассматриваются некоторые гиперболические уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными, являющиеся обобщением известного уравнения Эйлера — Дарбу с целыми коэффициентами.

Дается общее решение линейного уравнения, которое получается из уравнения Эйлера — Дарбу с целыми коэффициентами преобразованием независимых переменных ξ и η по формулам

$$\xi_1 = f_1(\xi), \ \eta_1 = f_2(\eta), \qquad (1)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции своих аргументов.

Указываются линейные и нелинейные уравнения, общее решение которых является некоторой фиксированной функцией независимых переменных и общего решения линейного уравнения, получившегося из уравнения Эйлера — Дарбу с целыми коэффициентами при помощи преобразования (1)

Отмечаются некоторые частные случаи рассматриваемых уравнений.

С. В. Валландер

4015. Новые исследования по разделению уравнения Лапласа. Мун, Спенсер (Recent investigations of the separation of Laplace's equation. Moon Parry, Spencer Domina Eberle), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 302—307 (англ.)

Сравниваются результаты авторов (Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 635) и Левинсона и др. (Levinson N., Bogert B., Redheffer R. M., Quart. Appl. Math., 1949, **7**, 241), относящиеся к разделению уравнения Лапласа, причем авторы ограничиваются рассмотрением вопроса в случае трехмерного пространства с криволинейными координатами (u^1, u^2, u^3).

По терминологии авторов, уравнение Лапласа (с неизвестной функцией φ) просто разделяется, если подстановкой

$$\varphi = \prod_{i=1}^{3} U^i(u^1, u^2, u^3)$$

оно может быть сведено к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Левинсон и другие рассматривали частичное разделение. По утверждению авторов, частичное разделение меньше отвечает требованиям приложений и требует большего ограничения; иногда даже оно невозможно. Последнее иллюстрируется на примере параболических координат (μ, ν, λ). Если разделение произвести относительно λ: $\varphi = S(\mu, \nu) Z(\lambda)$, то это не приводит к цели, а разделение же вида $\varphi = M(\mu) N(\nu) \Lambda(\lambda)$ возможно. Далее сравниваются различные системы координат, в которых уравнение Лапласа может быть частично или полностью разделено.

Примечание референта. Повидимому, авторам неизвестны исследования В. В. Степанова по разделению уравнения Лапласа, где найдены условия, при которых имеет место разделение в двумерном, трехмерном и четырехмерном случаях (Степанов В. В., Матем. сб., 1942, **11(53)**, № 3, 204—238).

З. И. Халилов

4016. О потенциальном векторе, вызванном поверхностными токами. Боду (Sur le potentiel vecteur du aux courants de surface. Baudoux Pierre), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1953, **39**, сер. 5, № 7, 636—639 (франц.)

Доказывается, что для потенциального вектора

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma \boldsymbol{v}}{r}\, ds,$$

где S — заданная поверхность, σ — плотность поверхностного распределения электрического заряда, $\boldsymbol{v}$ — скорость движения заряда по поверхности, r — расстояние между точкой интегрирования M и точкой P, лежащей вне поверхности S, имеет место равенство

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$$

при дополнительном предположении, что поверхностные токи не распространяются до бесконечности.

Как отмечает автор, доказательство этого факта ранее (De Donder Th., Théorie mathematique de l'électricité, Paris, 1925, 128) проводилось без указанного дополнительного предположения и потому не было строгим.

А. В. Бицадзе

4017. Сфера действия метода отражения. Келлер (The scope of the image method. Keller Joseph B.), Mathematics Research Group, Washington Square College of Arts and Science, New York University, Research Rep. № BR-2, 1953, I + 10 pp. (англ.)

Метод отражения, упомянутый в заглавии, является методом построения функции Грина для части D пространства, ограниченной плоскостями, посредством соответствующей функции Грина для всего пространства, причем граничное условие состоит в обращении в нуль нормальной производной. Первым требованием, очевидно, является то, чтобы множество образов особой точки функции Грина, образов этих образов и т. д. в рассматриваемой области D имело бы только одну точку, именно саму эту особую точку. Отражения в плоскостях, ограничивающих D, образуют группу, которая дискретна и имеет D фундаментальной областью. Фундаментальные области дискретных групп отражений известны; но только те, для которых угол между любыми двумя граничными плоскостями имеет вид π/p (p — целое), обладают нужным свойством. Вторая задача — определить линейные дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, к которым этот метод применим. Автор, повидимому, предполагает в этой части работы, что дифференциальное уравнение имеет постоянные коэффициенты. Наконец, исследование распространяется на граничные условия $G = 0$ или $\partial G/\partial n + hG = 0$ *E. T. Copson*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 877.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

4018. Об устойчивости процесса колебаний в дифференциальном уравнительном бассейне. Вейрих (Beitrag zur Stabilität des Schwingungsvorganges im Differentialwasserschloß. Weirich H.), Österr. Ingr-Arch., 1953, **7**, № 3, 236—243 (нем.; резюме англ., франц.)

Рассматриваются колебания масс воды в дифференциальном уравнительном бассейне для случая нагрузки турбины. Исследуются вопросы устойчивости процесса при регулировании турбины на постоянную мощность или на постоянный отбор воды.

Исходя из уравнений неустановившегося движения жидкости в системе, автор получает достаточно громоздкое уравнение колебаний масс воды. В результате упрощений, законность которых может быть обоснована экспериментально, исследование вопросов устойчивости сводится к рассмотрению уравнения вида

$$\ddot{s} + \varphi(t)\,\dot{s} + \psi(t)\,s = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, являющиеся, вообще говоря, функциями времени, определяются параметрами системы.

Принимая, что колебательный процесс является затухающим при выполнении неравенств

$$\varphi(t) > 0,\ \psi(t) > 0, \qquad (2)$$

автор получает два критерия устойчивости рассматриваемого процесса. Приводится пример применения полученных результатов к конкретной числовой задаче.

Примечание референта. Следует отметить, что условия (2) при произвольных непрерывных функциях $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ не являются достаточными для асимптотической устойчивости решения $s = 0$ уравнения (1). *Н. Н. Красовский*

4019. К теории релаксационных колебаний. Жан (Contribution à la description mathématique des oscillations de relaxation. Jean P.), J. phys. et radium., 1953, **14**, № 10, 36 (франц.)

Краткое резюме работы, в которой устанавливается аналогия между релаксационными колебаниями и автоколебаниями, описываемыми уравнениями Ван-дер-Поля

$$\ddot{y} - 2\varepsilon\varphi(y)\,\omega\dot{y} + \omega^2 y = 0. \qquad (1)$$

В случае релаксационных колебаний системы (1) возможно приближенное описание системы (1) уравнением

$$f(y)\cdot\dot{y} + y = 0. \qquad (2)$$

Устанавливаются условия, накладываемые на функцию $f(y)$ для того, чтобы решения уравнения (2) удовлетворяли условиям периодичности. *Г. М. Уланов*

4020. Нелинейные колебания системы с возмущающей силой, состоящей из двух гармоник. Никитин А. К., Уч. зап. Ростовского ун-та, 1953, **18**, № 3, 55—63

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$M\ddot{x} + f(x) = a_m \sin m\omega t + a_n \sin n\omega t,$$

где M, a_m, a_n, ω — постоянные, m, n — целые числа, $f(x)$ — нелинейная характеристика. Решение разыскивается в форме:

$$x = q_m \cos m\omega t + p_m \sin m\omega t + q_n \cos n\omega t + p_n \sin n\omega t,$$

$$\dot{x} = \omega\,[m(-q_m \sin m\omega t + p_m \cos m\omega t) + n(-q_n \sin n\omega t + p_n \cos n\omega t)].$$

Тогда после усреднения получаются дифференциальные уравнения для определения функций q_m, p_m, q_n, p_n. Затем методом Б. В. Булгакова (Прикл. матем. и механика, 1943, **7**, № 1, 31—40) построены уравнения для определения установившихся вынужденных колебаний:

$$x = p_m^0 \sin m\omega t + p_n^0 \sin n\omega t,$$

и выяснены условия устойчивости этих колебаний. В качестве примера рассматривается случай кубической характеристики. *И. С. Аржаных*

4021. Амплитудная устойчивость в колебательных системах. Скотт (Amplitude stability in oscillating systems. Scott Norman R.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 8, 1031—1034 (англ.)

Применяя метод Крылова — Боголюбова определения амплитуд колебания в квазилинейных системах, автор выводит критерии амплитудной устойчивости, основываясь на методе баланса энергии.

Для нелинейного колебательного контура, описываемого уравнением

$$C\ddot{v} + (G + G_n)\dot{v} + \Gamma v = 0,$$

где G_n — нелинейная проводимость:

$$G_n = \frac{di}{dv} = \alpha + 2\beta v + 3\gamma v^2 + 4\varepsilon v^3 + 5\rho v^4,$$

получен критерий, характеризующий устойчивые амплитуды, в виде

$$\frac{\partial P_D}{\partial a} > \frac{\partial P_S}{\partial a},$$

где

$$P_D = \frac{a^2}{2} G, \quad P_S = -\frac{a^2}{2} G_e,$$

$$G_e = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} G_n (a \cos\theta) \cos\theta \, d\theta$$

(в работе выражение для G_e написано неправильно).

Для вывода критерия устойчивости в случае системы со многими степенями свободы автор использует общеизвестные соотношения

$$\frac{d\left(a_i^k\right)}{dt} = -\frac{2a_i^2\delta_{0i}}{G_i}(G_i + G_{ei})$$

(см., например, Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, Изд-во АН УССР, Киев, 1937). Составляются уравнения в вариациях, после чего применяются условия Рауса — Гурвица.

Ю. А. Митропольский

4022. О некоторых квази-резонансных явлениях в пучке проводов. Бразма Н. А., Сб. научн. работ по проводной связи АН СССР, 1953, № 2, 59—70

Рассматривается матричная система телеграфных уравнений

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1)$$

$$(t > 0, \ 0 < x < l)$$

при условиях $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$,

$$u(x, 0) = f^{(1)}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = f^{(2)}(x).$$

Она решена матричным методом Фурье в другой работе автора (Бразма Н. А., Изв. АН ЛатвССР, 1949, № 5, 125—131) в предположении, что уравнения

$$\left| (R + \lambda L)(G + \lambda C) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} E \right| = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

(λ — неизвестное) имеют только простые корни. В настоящей работе исследуется случай, когда некоторые из этих уравнений имеют кратные корни, и дается физическая интерпретация соответствующих частных решений.

Если к решению (1) применить модифицированный метод, использованный автором в других работах (например, Бразма Н. А., Докл. АН СССР, 1951, 76, № 1, 41—44), то отпадет надобность такого различия в кратности корней уравнения (2).

Э. Я. Риекстыньш

4023. Трение покоя и трение скольжения в системах, содержащих обратную связь. Доу, Шултхейсс (Static and sliding friction in feedback systems. Tou J., Schultheiss P. M.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 9, 1210—1217 (англ.)

Методом гармонического баланса Н. Крылова и Н. Боголюбова (Крылов и Боголюбов, Введение в нелинейную механику, 1937) изучается задача об определении периодических режимов в системе, которая отличается от системы, описываемой обыкновенными линейными уравнениями с постоянными и действительными коэффициентами, лишь учетом сухого (кулоновского) трения, действующего вдоль одной из обобщенных координат. Учитывается различие между коэффициентом трения покоя и движения. Обычное для метода гармонического баланса предположение о близости рассматриваемой системы к линейной консервативной не вводится, но предполагается, что, несмотря на это, колебания близки к гармоническим в связи с тем, что линейная часть системы является фильтром низких частот, не пропускающим гармоники, порождаемые нелинейностью.

Задача сводится к определению близких к гармоническим периодических решений уравнения $D(p)\,x = K(p)\,y$, $y = f(x)$, где $p = d/dt$, D и K — полиномы с действительными коэффициентами, а $f(x)$ — нечетная неоднозначная функция. Решение ищется в форме $x = A\sin\omega t$. Полагая $f(A\sin\omega t) \approx \approx a_1(A)\sin\omega t + b_1(A)\cos\omega t$, где $a_1(A)$ и $b_1(A)$ — соответствующие коэффициенты Фурье, получают для определения A и ω равенство $H(i\omega) = 1/H_0(A)$, где $H(i\omega) = K(i\omega)/D(i\omega)$, $H_0(A) = a_1(A)/A + ib_1(A)/A$. Значения ω и A определяются точкой пересечения годографов $1/H_0(A)$ для случая, когда $f(x)$ определяется силами кулоновского трения при различных соотношениях между коэффициентами трения покоя и движения.

Авторы реферируемой работы, цитируя Кохенбургера (1950 г.), не цитируют работу Крылова и Боголюбова (см. выше) и работу Гольдфарба Л. С., решавшего этим же методом аналогичные задачи теории автоматического регулирования.

М. А. Айзерман

4024. О нелинейном сервомеханизме с несколькими переменными. Митрович (Sur un servomécanisme non linéaire à plusieurs variables indépendantes. Mitrović Dusan), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 20, 1209—1211 (франц.)

Рассматриваются электрические устройства для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих заданным условиям при $t = t_1 > 0$.

Приводится пример схемы такого рода, предназначенной для решения уравнения $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$, и высказываются некоторые соображения о возможности использовать сервомеханизмы для интегрирования уравнений более общего вида $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$ при заданных $y(t_1)$ и $\dot{y}(t_1)$.

М. А. Айзерман

4025. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. Четаев Н. Г., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 1, 123—124

Доказано, что неравенство

$$C^2 r_0^2 - 4Amgz > 0$$

является не только необходимым, но и достаточным условием безусловной устойчивости по отно-

шению к функциям p, q, r (проекции мгновенной угловой скорости тела на главные оси инерции) и γ, γ', γ'' (направляющие косинусы вертикали) частного решения

$$p = q = 0, \quad r = r_0, \quad \gamma = \gamma' = 0, \quad \gamma'' = 1$$

системы уравнений движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. Здесь $A = B, C$ обозначают главные моменты инерции твердого тела для неподвижной точки, mg — вес и z — координата центра тяжести тела.

Функция Ляпунова, решающая задачу, построена при помощи четырех известных интегралов уравнений возмущенного движения.

В. В. Румянцев

4026. Отражение волн от неоднородной среды. Хайнс (Reflection of waves from varying media. Hines C. O.), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 1, 9—31 (англ.)

Разделяя переменные в волновом уравнении (с переменным коэффициентом) на прямой, приходим к уравнению

$$d^2f/dx^2 + k^2n^2(x)f = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \qquad (1)$$

где k (волновое число) положительно, а функция $n^2(x)$ вещественна, непрерывна, равна 1 для $|x| > x_0 > 0$ и не превосходит 1 для прочих x. Вводим функцию $r = r(x)$ при помощи равенства $f = \exp\left[ik\int_{x_0}^{x} r(s)\,ds\right]$, подставляя в уравнение (1), получим уравнение относительно r:

$$n^2 = r^2 - \frac{i}{k}\frac{dr}{dx}. \qquad (2)$$

Рассматриваются три решения уравнения (2): $r^+ = 1$ для $x \leqslant -x_0$, $r^- = -1$ для $x \leqslant -x_0$, $r' = 1$ для $x \geqslant x_0$. На основе этих трех решений уравнения (2) строятся три решения уравнения (1): f^+, f^- и f'. Между этими решениями устанавливается соотношение

$$F^+f^+ + F^-f^- = F'f',$$

где F^+, F^- и F' — некоторые комплексные константы. Тогда отношение $R = F^-/F^+$ называется коэффициентом отражения комплексных амплитуд. В ряде работ различных авторов, приводимых в статье, рассматриваются приближенные методы исследования этого коэффициента (в частности, его зависимости от k). Здесь для изучения этого вопроса вводятся $r_1(x)$ и $r_2(x)$ — вещественная и мнимая части $(ikf^+(x))^{-1}df^+/dx$; они удовлетворяют системе уравнений

$$r_1^2 - r_2^2 + dr_2/kdx = n^2(x), \quad 2r_1r_2 - dr_1/kdx = 0,$$
$$r_1(-\infty) = 1, \quad r_2(-\infty) = 0. \qquad (3)$$

Коэффициент k просто выражается через $r_1(x)$, $r_2(x)$ и функции $r_1'(x)$, $r_2'(x)$, составленные аналогичным образом для $f'(x)$. Посредством ряда нестрогих рассуждений, на основе сравнения уравнений (3) автор пытается установить возможную картину поведения r_1 и r_2, если $n^2(x)$ не имеет ни одного или имеет один или два интервала отрицательности. Приводимые утверждения говорят об общем ходе изменения r_1 и r_2, в частности, об их поведении при больших k; приведены соответствующие графики. Возможно далее, задаваясь функциями r_1 и r_2 (находящимися в необходимом соотношении между собой), на основании (3) находить $n^2(x)$ и тем самым строить примеры сред с известным точно коэффициентом отражения, в частности, с нулевым коэффициентом для данного k (т. е. сред, совсем не отражающих данных частот) или для некоторого спектра k, в случае двух интервалов отрицательности $n^2(x)$. Рассчитанные примеры показывают значительные ошибки, получающиеся при применении известных ранее приближенных методов в ряде случаев — если n^2 меняется быстро, или имеет малый по абсолютной величине минимум, или имеет более одного интервала отрицательности. Изложение проводится для случая электромагнитных волн; однако применяемые методы годны также для волн иного типа. Приводится физическая интерпретация полученных утверждений.

Опечатки: в формуле (19) перед первым членом в квадратных скобках, а также в формуле (38) перед последним членом надо переменить знак.

А. Д. Мышкис

4027. К вопросу о физическом и математическом описании способности живых организмов реагировать на раздражение. Кемень (Contribution à l'explication physique et mathématique de la capacité de réaction des organismes vivants. Kemény J a n o s), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, **60**, № 7—8, 209—240 (франц.)

Математическое содержание статьи сводится к подбору дифференциального уравнения вида $m(x)\frac{d^2x}{dt^2} + R(x)\frac{dx}{dt} + D(x)x = 0$, имеющего данное экспериментально найденное семейство кривых в качестве части семейства интегральных кривых, соответствующей одному фиксированному начальному условию.

В. И. Левин

4028. Новые приложения функционального анализа к механике. Пайу (Nouvelles applications du calcul fonctionnel a la mécanique. P a i l l o u x H e n r i), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1953, сер. 3, **70**, № 1, 1—49 (франц.)

Работа является продолжением исследований автора (Ann. scient. Ecole norm. supér., 1952, сер. 3, **69**, 213—257) и посвящена выводу дифференциальных уравнений механики сплошной среды при помощи вариационных принципов.

Для получения дифференциальных уравнений деформации толстой плиты, имеющей в естественном состоянии срединную поверхность $z = z(x, y)$ и переменную толщину $\pm h(x, y)$, смещения представляются в виде $u_1 + \zeta u_2$, $v_1 + \zeta v_2$, $w_1 + \zeta w_2$, $-h \leqslant \zeta \leqslant +h$. Вычислены живая сила, упругий потенциал, работа приложенных сил и при помощи принципа Гамильтона получены дифференциальные уравнения для u_k, v_k, w_k (k=1, 2). Если пренебречь слагаемыми ζu_2, ζv_2, ζw_2, то уравнения автора имеют вид

$$2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{2h\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu h\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + X,$$

$$2\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu h\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{2h\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right]\right\}+Y,$$
$$2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu h\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu h\frac{\partial w}{\partial y}\right)+Z,$$

где X, Y, Z выражаются через проекции массовой силы и поверхностных сил. Рассмотрен случай равновесия плиты постоянной толщины $\pm\varepsilon$. Учитывая из внешних сил только давление $p(x, y)$ на поверхности, получают уравнение

$$\frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+2\mu)\,\Delta^2 w=\left[-\mu+\frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+2\mu)\,\Delta\right]\frac{p}{\mu\varepsilon},$$

где Δ— оператор Лапласа. Получены также дифференциальные уравнения синусоидальных колебаний плиты. Затем рассмотрена задача о деформации плиты в криволинейных, в частности цилиндрических, координатах. В этом случае даны формулы для напряжений. Более подробно рассмотрен случай плиты, изогнутой первоначально в виде поверхности вращения.

В разделах 9 и 10 выведены дифференциальные уравнения гидродинамики невязкой жидкости и газа в произвольных параметрах Лагранжа и показано совпадение уравнений автора с уравнениями Лагранжа в частном случае выбора функций параметров.

В разделах 11—15 выводятся дифференциальные уравнения деформаций стержней мостовых ферм, причем и здесь в основу положен вариационный принцип. Граничные условия возникают вполне естественно в результате реализации условий минимума соответствующего функционала.

Отметим также выведенное в разделе 16 уравнение

$$2GJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+EI\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\lambda p=0$$

для определения прогиба w пластинки при учете кручения.

В разделе 17 ставится задача о минимальной затрате материала при возведении прочной колонны, ограниченной поверхностью вращения $r=r(x)$, нагруженной силой Q. Составляется уравнение продольного изгиба без учета собственного веса колонны и найденное отсюда значение r подставляется в интеграл, определяющий объем колонны. Полученное уравнение Эйлера определяет $y(x)$, а затем находится $r(x)$. Уравнение не проинтегрировано. *И. С. Аржаных*

4029. Применение теоремы взаимности к определению суммарных сил и моментов в пространственных контактных задачах. Моссаковский В. И., Прикл. матем. и механика, 1953, 17, № 4, 477—482

Рассматривается задача о давлении штампа произвольной формы в плане на упругое полупространство. Расположим упругую среду в верхнем полупространстве ($z>0$) и обозначим часть границы $z=0$, где произошел контакт с полупространством, через S^0, а остальную часть через S. Пусть поверхность штампа после вдавливания задана уравнением $z=f(x, y)$. Предполагается, что в области S известны составляющие внешнего напряжения и что между соприкасающимися поверхностями отсутствует трение.

Устанавливается, что если найдены распределения давления под подошвой плоского штампа данной формы в плане и граничные значения составляющих вектора перемещения вне штампа, то суммарная сила и моменты, действующие на штамп с любой поверхностью основания, но той же формы в плане, могут быть определены при помощи квадратур.

Известно, что решение задачи о давлении жесткого штампа на упругое полупространство сводится к нахождению гармонической в полупространстве функции $\varphi(x, y, z)$ по граничным условиям: $\varphi(x, y, 0)=f(x, y)$ в области S^0, $\varphi'_z(x, y, 0)=0$ в области S. При этом давление под подошвой штампа и нормальное смещение точек границы определяются непосредственно через функцию φ; граничные же значения касательного вектора перемещения $(u(x, y), v(x, y))$ находятся посредством φ путем решения некоторых задач типа Неймана (Лурье А. И., Прикл. матем. и механика, 1941, 5, № 3, 383 — 408).

Автор указывает другой способ нахождения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ посредством интегралов типа Коши, пользуясь результатами Н. И. Мусхелишвили. В качестве примера рассматривается штамп круговой формы в плане. *А. И. Каландия*

4030. Об одном интегро-дифференциальном соотношении в теории упругой нити (каната) переменной длины. Ишлинский А. Ю., Украинский матем. ж., 1953, 5, № 4, 370—374

Предлагается оригинальная методика для приближенного определения перемещений $u(x, t)$ точек каната, который наматывается на колесо или сматывается с колеса. При этом учитывается сила тяжести как груза на конце, так и каната. В начале указана методика автора в применении к канату постоянной длины: из дифференциального уравнения и граничных условий (после умножения на x и интегрирования по частям с последующим использованием граничных условий) получено интегро-дифференциальное соотношение, которое после подстановки $u=x\varphi$ приводит к дифференциальному уравнению Релея.

Для каната переменной длины $l(t)=\xi-u(l, t)$ (ξ — расстояние от груза до точки схода каната с колеса) из дифференциального уравнения

$$\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)=E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho g \qquad (1)$$

и граничных условий

$$u(0, t)=0,\quad m\frac{d^2\xi}{dt^2}=-EF\frac{\partial u(0, t)}{\partial x}+mg, \qquad (2)$$
$$\left[1+\frac{\partial u(l, t)}{\partial x}\right]\frac{dl}{dt}=-v \qquad (3)$$

(m — масса груза, F — площадь сечения каната, v — окружная скорость колеса) получено интегро-дифференциальное соотношение, связывающее смещение и длину каната,

$$\left(m+\frac{1}{2}\rho Fl\right)l\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2}+\left(m+\frac{1}{2}\rho Fl\right)l\frac{dl}{dt}\times$$
$$\times\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x\,\partial t}-\rho F\int_0^l(l-x)\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}dx+EFu(l, t)=$$

$$= \left(m + \frac{1}{2}\rho Fl\right) l \frac{dv}{dt} + \left(m + \frac{1}{2}\rho Fl\right) lg. \quad (4)$$

Предполагая далее, что $u = x\varphi(t)$, автор получает для определения φ линейное дифференциальное уравнение

$$\left(m + \frac{1}{3}\rho Fl\right) l \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(m + \frac{1}{2}\rho Fl\right) \frac{dl}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + EF\varphi =$$
$$= \left(m + \frac{1}{2}\rho Fl\right) \frac{dv}{dt} + \left(m + \frac{1}{2}\rho Fl\right) g. \quad (5)$$

Отмечаются два частных случая: 1) $l = \text{const}$ ($v=0$), 2) $\rho = 0$. Во втором случае из уравнения (5) получается уравнение, которое исследовал Н. П. Неронов (Определение напряжений в подъемных канатах, Труды совещания по шахтным подъемным канатам, Изд-во АН СССР, 1944). *И. С. Аржаных*

4031. Поверхность моментов для упругой пластины или перекрытия и определение прогибов по моментам. Мюллер (Die Momentenfläche der elastischen Platte oder Pilzdecke und die Bestimmung der Durchbiegung aus den Momenten. Müller W.), Ingr-Arch., 1953, **21**, № 1, 63—72 (нем.)

Рассматривается опертая по краю прямоугольная пластина со сторонами a и b под действием сосредоточенной силы P, приложенной в точке (x_0, y_0). Приводится формула

$$M = \frac{m_x + m_y}{1 + \nu} = \frac{P}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \frac{\vartheta_1\left(\frac{\zeta - \overline{\zeta_0}}{2}\right) \vartheta_1\left(\frac{\zeta + \overline{\zeta_0}}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\zeta - \zeta_0}{2}\right) \vartheta_1\left(\frac{\zeta + \zeta_0}{2}\right)},$$

где m_x и m_y — изгибающие моменты, ν — постоянная Пуассона, $\zeta = (x + iy)/a$, $\zeta_0 = (x_0 + iy_0)/a$ и входящий в определение ϑ-функций аргумент $q = e^{-\pi b/a}$. Автор указывает, что эта формула заимствована им (Tölke F., Ingr.-Arch., 1934, **5**, 187). Разлагая функцию ϑ_1 в ряд по степеням q и сохраняя в этом ряду 2—3 члена, автор получает простые формулы, по которым производит ряд вычислений, конечным результатом которых является определение величины M. Результаты вычислений приведены в виде таблицы и ряда графиков. Выводится формула для прогиба пластины, который выражается через функции

$$\int_0^{\zeta} \ln \vartheta_3\left(\frac{\zeta}{2}\right) d\zeta, \quad \int_0^{\zeta}\int_0^{\zeta} \ln \vartheta_3\left(\frac{\zeta}{2}\right) d\zeta\, d\zeta.$$

Примечание референта. Автор неправильно приписывает себе формулу, дающую представление любой бигармонической функции двух переменных через две аналитические функции комплексного переменного. На самом деле, как известно, эта формула была получена Э. Гурса в 1898 г. (Goursat E., Bull. Soc. Math. France, 1898, **26**, 236). *С. Г. Михлин*

4032. Об одной нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных, имеющей приложение в теории фильтрации. Розенберг М. Д., Докл. АН СССР, 1953, **89**, № 2, 233—236

Нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{l_{ij}}}{\partial x^{l_{ij}}} \left[x^{m_j} f_{ij}(u_1, \ldots, u_n) \left(\frac{\partial^{s_{ij}} u_i}{\partial x^{s_{ij}}} \right)^{\varkappa_{ij}} \right] =$$
$$= x^{m_j} \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_j(u_1, \ldots, u_n) \right]^{\sigma_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad (1)$$

при условии $\alpha = \sigma_j / (\varkappa_{ij} s_{ij} + l_{ij}) = \text{const}$ заменой

$$\eta = xt^{-\alpha} \quad (2)$$

сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d^{l_{ij}}}{d\eta^{l_{ij}}} \left[\eta^{m_j} f_{ij}(u_1, \ldots, u_n) \left(\frac{d^{s_{ij}} u_i}{d\eta^{s_{ij}}} \right)^{\varkappa_{ij}} \right] =$$
$$= (-\alpha)^{\sigma_j} \eta^{m_j} + \sigma_j \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta}(u_1, \ldots, u_n) \right]^{\sigma_j},$$
$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Частные случаи преобразования (2) применялись Л. С. Лейбензоном (Изв. АН СССР, сер. геогр. и геодез., 1945, **9**, № 1, 3—6) для сведения к обыкновенному дифференциальному уравнению нелинейного уравнения в частных производных турбулентного движения газа в пористой среде и П. Я. Полубариновой-Кочиной (Докл. АН СССР, 1948, **63**, № 6, 623—626) для сведения к обыкновенному дифференциальному уравнению нелинейного дифференциального уравнения в частных производных фильтрации грунтовых вод. При частных предположениях из систем уравнений (1) получаются:

1. Уравнения фильтрации газированной нефти в пористой среде при степенном законе фильтрации с показателем $\varkappa$ в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[x^m \Phi_j(p, \rho) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\varkappa} \right] = x^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(p, \rho), \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

2. Уравнения движения трехфазной смеси нефть-вода-газ в пористой среде в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[x^m \psi_j(p, \rho_н, \rho_в) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\varkappa} \right] =$$
$$= x^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(p, \rho_н, \rho_в), \quad j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

При $m = 0$ получаем одномерную, при $m = 1$ плоско радиальную и при $m = 2$ сферически радиальную фильтрацию. Приведены обыкновенные дифференциальные уравнения, к которым сводятся нелинейные системы (3) и (4). Указывается, что практический интерес представляет решение систем (3) и (4) соответственно при следующих краевых условиях:

1) $p|_{x=0} = p_c$, $p|_{t=0} = p_0$ и $\rho|_{t=0} = \rho_0$,

2) $p|_{x=0} = p_c$, $p|_{t=0} = p_0$,
$\rho_н|_{t=0} = \rho_{н0}$ и $\rho_в|_{t=0} = \rho_{в0}$.

Автор не дает решений перечисленных задач. *Г. Е. Салехов*

4033. О вычислении функции давления и функции расхода в случае фильтрации упругой жидкости в пласте. Пилатовский В. П., Прикл. матем. и механика, 1953, **17**, № 2, 179—188

Дан метод приближенного решения задачи о радиальной фильтрации упругой жидкости в плоском пласте, образованном системой концентрических кольцевых областей S_ν ($\nu = 1, \ldots, n$). В каждой области фильтрационные свойства пласта постоянны. Дифференциальное уравнение для давления в области S_ν имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\varkappa_\nu^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad (1)$$

где $\varkappa_\nu$ — коэффициент пьезопроводности.

Объемный расход через боковую поверхность цилиндра радиуса r в области S_ν есть

$$q_\nu = -2\pi r c_\nu \frac{\partial p}{\partial r} \quad (c_\nu \text{ — коэффициент фильтрации}).$$

Вводятся безразмерные параметры длины ρ, времени τ, функции давления $h(\rho, \tau)$ и функции расхода $\omega(\rho, \tau)$:

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{\varkappa_\nu^2 t}{R^2}, \quad h(\rho, \tau) = \frac{p(r, t)}{P},$$

$$\omega(\rho, \tau) = -\frac{q_\nu}{2\pi c_\nu P} = \rho\frac{\partial h}{\partial \rho}.$$

Здесь R и P — соответственно произвольно взятые радиус и перепад давлений. Тогда уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\partial h}{\partial \tau}.$$

Применение изображения по Карсону дает изображающее уравнение для области S_ν:

$$\frac{d^2 H_\nu}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dH_\nu}{d\rho} - sH_\nu = 0,$$

откуда $H_\nu(\rho, s) = A_\nu I_0(\rho\sqrt{s}) + B_\nu K_0(\rho\sqrt{s})$;

$$\Omega_\nu(\rho, s) = \rho\sqrt{s}\,[A_\nu I_1(\rho\sqrt{s}) - B_\nu K_1(\rho\sqrt{s})],$$

где $H_\nu(\rho, s) \div h(\rho, \tau)$, $\Omega_\nu(\rho, s) \div \omega(\rho, \tau)$, а $I(z)$ и $K(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода от чисто мнимого аргумента. A_ν и B_ν — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий для области S_ν. Рассмотрены лишь постоянные краевые условия.

Для нахождения числовых значений функции $h(\rho, \tau)$ автор применяет способ, основанный на представлении решения задачи в виде суммы n членов асимптотического разложения для области малых значений параметра τ и остаточного члена. Остаточный член вычисляется с помощью специального тригонометрического ряда, коэффициенты которого определяются по изображению искомого решения и по изображению n членов асимптотического разложения (Пилатовский В. П., Докл. АН СССР, 1952, **82**, № 2, 197—200; **83**, № 5, 649—650).

Приведенная таблица значений $h(1, \tau)$, полученных численным интегрированием по точной формуле и способом автора, показывает хорошее их совпадение. *В. Л. Данилов*

4034. Парадокс длинной волны в теории гравитационных волн. Эрселл (The long-wave paradox in the theory of gravity waves. Ursell F.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 4, 685—694 (англ.)

Рассматриваются двумерные поверхностные волны малой амплитуды η_0 в тяжелой несжимаемой жидкости постоянной глубины h. Применяя параметры Лагранжа a, b, t, автор берет в качестве дифференциальных уравнений для координат x и y элемента жидкости уравнение неразрывности и условие равенства нулю вихря. При этом задаются следующие граничные условия: на дне $y = 0$, а на свободной поверхности давление $p = 0$. Вводятся предположения, что волна перемещается поступательно со скоростью, приближенно равной $\sqrt{gh}$, и изменение скорости в направлении b мало, порядка $\sqrt{\varepsilon}$. x и y представляются при помощи степенных рядов по параметрам b и ε, а затем берутся приближенные решения. Критерием для приближения служит параметр $\eta_0\lambda^2/h^3$, где λ — длина волны. В зависимости от порядка этого параметра можно получить разные рассмотренные раньше другими авторами приближенные уравнения, которые охватываются уравнением

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = gh\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{3}{2}\frac{\eta^2}{h} + \frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right),$$

полученным в свое время Бусинеском (Boussinesq J., J. math. pures et appl., 1872, **17**, 55—108).

Основные результаты исследования: 1) линейная теория поверхностных волн справедлива только при малых значениях η_0/λ и $\eta_0\lambda^2/h^3$; 2) результат, полученный Эри (G. B. Airy), о невозможности поступательного перемещения длинной волны без постоянного изменения ее формы имеет место только при $\eta_0\lambda^2/h^3 \gg 1$. *Д. Е. Долидзе*

4035. О функциональных свойствах операторов векторного анализа и гидродинамики. Крейн С. Г., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 6, 969—972

Рассматриваются некоторые свойства линейных операторов векторного анализа и гидродинамики в гильбертовом пространстве H вектор-функций $\boldsymbol{v}(x, y, z)$, определенных в звездной относительно начала координат конечной односвязной области G, для которых интеграл от $|\boldsymbol{v}|^2$ по G конечен.

Пусть подпространство D пространства H есть замыкание множества соленоидальных вектор-функций $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$; подпространство N — ортогональное дополнение к подпространству π, являющемуся замыканием множества всех потенциальных вектор-функций $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$. Автор формулирует теорему о существовании бесконечно дифференцируемого решения уравнения $\Delta\boldsymbol{w} = \operatorname{grad} p$ (p — гармоническая функция), принадлежащего D и принимающего на границе области G те же значения, что и любая дифференцируемая вектор-функция $\boldsymbol{f}$ из D. Дается также формула для определения $\boldsymbol{w}$ через $\boldsymbol{f}$ при помощи соответственно подобранных операторов. Вводится самосопряженное расширение оператора Δ в N и формулируется теорема о построении решения уравнения

$$\Delta u = \operatorname{grad} p - \boldsymbol{g}$$

в G, где $\boldsymbol{g}$ — дифференцируемая вектор-функция, принадлежащая N,

$$p = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{(\boldsymbol{g}\boldsymbol{r})}{r^3}\,d\tau.$$

Приведенные результаты можно применить для доказательства теорем существования решений граничных задач линейных уравнений стационарного и нестационарного движений вязкой жидкости, доказанных раньше другими авторами с помощью методов теории потенциала и тензора Грина.

В конце работы рассматривается задача о малых колебаниях вязкой жидкости в области G вблизи ее некоторого стационарного движения.

Д. Е. Долидзе

4036. Естественные соотношения, удовлетворяемые векторами вихря и скорости в теории потока жидкости. Коберн (Intrinsic relations satisfied by the vorticity and velocity vectors in fluid flow theory. Coburn N.), Michigan Math. J., 1952, 1, № 2, 113—130 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Некоторые основные формулы динамики идеальной жидкости преобразуются к естественным координатным осям, выбранным по касательной, главной нормали и бинормали линии тока. Разлагая вектор вихря по этим трем направлениям, автор получает обобщение на трехмерный случай известной зависимости между величинами векторов вихря и скорости в случае двумерного движения. Проекция вектора вихря на бинормаль совпадает с величиной вихря в двумерном движении. Выводится необходимое и достаточное условие параллельности поверхностей постоянства функции Бернулли (сумма функции давления, половины квадрата скорости и потенциала массовых сил).

На основании уравнений движения идеальной жидкости доказывается несколько теорем о законах изменения величины скорости, давления и плотности по естественным направлениям. Рассуждения касаются как несжимаемой, так и сжимаемой изэнтропической и неизэнтропической жидкости. Исследуются также некоторые геометрические свойства линий тока и поверхностей постоянства функции φ, если скорость пропорциональна градиенту φ.

Д. Е. Долидзе

4037. Слабый сферический источник во вращающейся жидкости. Стюартсон (A weak spherical source in a rotating fluid. Stewartson K.), Quart. J. Mech. and. Appl. Math., 1953, 6, № 1, 45—49 (англ.)

Пусть жидкость вращается равномерно вокруг оси z, на которой лежит центр сферического источника радиуса a. Рассматривается движение жидкости с момента, когда из источника начинается выбрасывание жидких частиц со скоростью W. На мощность источника накладывается условие, которое должно обеспечить возможность линеаризации уравнений движения жидкости. Обозначая через u, v, w проекции скорости возмущенного движения на координатные оси, вращающиеся вокруг оси z с постоянной угловой скоростью, равной угловой скорости невозмущенной жидкости, автор решает задачу при следующих граничных условиях:

$xu + yv + zw = Wa$ при $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\ (t \geqslant 0)$,

$u = v = 0$ при $x^2 + y^2 + z^2 > a^2\ (t = 0)$,

$u, v, w \to 0$ при $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty\ (t \geqslant 0)$.

Уравнения движения записываются для функции

$$\overline{P} = \int_0^\infty e^{-st} P\,dt, \quad \text{где} \quad P = \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}R^2,$$

R — расстояние от оси, p — давление, ρ — плотность.

Доказывается, что влияние источника распространяется в области внутри цилиндра радиуса a с образующими, параллельными z. Скорость возмущенного движения на поверхности этого цилиндра имеет особенность.

Работа содержит некоторые обобщения результатов, полученных раньше автором и другими исследователями.

Д. Е. Долидзе

4038. Заметка о поперечных линиях Маха в простых волнах плоского сверхзвукового течения. Хасимото (A note on cross Mach lines in simple waves in the plane supersonic flow. Hasimoto Zirō), J. Phys. Soc. Japan, 1953, 8, № 2, 248—251 (англ.)

Автор пользуется следующими обозначениями: ρ — плотность газа, ρ_0 — плотность газа в некоторой точке, c — локальная скорость звука, q — модуль вектора скорости, θ — угол между вектором скорости и осью x.

Вводятся следующие функции:

$$\chi = \left\{\frac{\rho_0 q^2}{\rho}\frac{d}{dq}\left(\frac{\rho_0}{\rho q}\right)\right\}^{1/4}, \quad \tau = \int_{q_*}^{q}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{q^2}\right)^{1/2} dq,$$

где q_* — величина постоянная. Ограничиваясь случаем установившегося изэнтропического безвихревого течения невязкого идеального газа, автор рассматривает простые волны, т. е. движения, в которых все функции имеют общую систему линий уровня, совпадающую с первым семейством линий Маха (прямых). Тогда линии Маха второго семейства (поперечные линии Маха) характеризуются соотношением $\rho c r \chi = \text{const}$, где r — расстояние произвольной точки поперечной линии Маха до фиксированной поперечной линии Маха, измеряемое вдоль прямой линии Маха.

Значение функции тока вдоль поперечной линии Маха дается выражением $\psi = \psi_i + k/\chi$, где ψ_i — значение ψ вдоль заданной начальной поперечной линии Маха, а k постоянно вдоль каждой поперечной линии Маха.

Н. Н. Яненко

4039. О предельной линии в простой волне. Хасимото (On the limiting line in a simple wave. Hasimoto Ziro), J. Phys. Soc. Japan, 1953, 8, № 2, 251—254 (англ.)

Рассматриваются простые волны в случае установившегося изэнтропического безвихревого течения невязкой идеальной жидкости. Опираясь на результаты своей работы (см. реф. 4038), автор устанавливает для простой волны некоторые свойства, аналогичные свойствам произвольного потенциального течения. Автор определяет предельную линию простой волны как огибающую прямых линий Маха.

Доказывается два основных утверждения:

1. Линия Маха второго семейства (так называемые поперечные линии Маха) имеют на предельной линии точки возврата.

2. На каждой поперечной линии Маха функция тока принимает свое экстремальное значение в точке, лежащей на предельной линии.

Н. Н. Яненко

4040. Приливные колебания океанографических элементов. Миядзаки (Tidal variations of

oceanographical elements. Miyazaki Masamori), Oceanogr. Mag., 1953, 4, № 4, 149—158 (англ.)

Рассматриваются приливные колебания океанографических элементов (температуры, солености и др.) в граничной области между двумя сосуществующими и смешивающимися различными водными массами. Предполагая, что изменения происходят лишь вдоль горизонтальной оси x, задачу можно свести к решению уравнения

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где u — скорость приливного течения, изменяющегося по закону $u=u_0\cos\sigma t$.

В качестве граничных условий $\theta|_{x=-r}$ и $\theta|_{x=r}$ приняты постоянными и равными θ_1 и θ_2 соответственно: $\theta=\theta_1$ при $x=-r$; $\theta=\theta_2$ при $x=r$.

Вместо начальных условий принято, что колебания θ установившиеся и их основной период равен $2\pi/\sigma$. Заменой переменных $t'=t$ и $x'=x-u_0/\sigma\sin\sigma t$ уравнение (1) приводится к обычному одномерному уравнению теплопроводности, решение которого получается методом температурных волн.

При помощи разложения в ряд входящих в решение множителей $\exp\{\pm i^{1/2}Z\sin\delta\}$ общее решение уравнения (1) записывается в виде ряда Фурье с коэффициентами, зависящими от x. Тогда удовлетворение граничным условиям дает систему бесконечного числа уравнений для определения произвольных постоянных.

Окончательное решение автор получает приближенно, ограничиваясь двумя первыми членами разложения экспоненциальных множителей и двумя гармониками колебания θ. Теоретические расчеты, проведенные в этом приближении, показывают, что амплитуды и сдвиги фаз океанографических элементов в приливном течении имеют наибольшее значение при $x=0$ и уменьшаются по обе стороны от $x=0$. Изменения этих элементов связаны также с длиной пограничной области и с амплитудой приливного течения, причем при достаточно больших r запаздывание по фазе почти равно $3\pi/2$, а амплитуда незначительно убывает с r.

Сравнение теоретических моделей колебаний температуры воды в приливном течении с результатами наблюдений дает хорошее согласие.

А. А. Пивоваров

4041. Импульсное нагревание поверхности полубесконечного тела. Егер (Pulsed surface heating of a semi-infinite solid. Jaeger J. C.), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 1, 132—137 (англ.)

Рассматривается задача о нагревании полубесконечного тела, ограниченного плоскостью, когда тепло подводится к поверхности правильными прямоугольными импульсами, так что поток тепла F через поверхность равен

$$\left.\begin{aligned}F&=F_0 \quad nT<t<nT+T_1\\ F&=0 \quad nT+T_1<t<(n+1)T\end{aligned}\right\}\ n=0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

Решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial t}=0,\quad x>0,\ t>0, \qquad (2)$$

с условиями

$$v=0 \quad \text{при } t=0,\ x>0, \qquad (3)$$

$$-k\frac{\partial v}{\partial x}=F \quad \text{при } x=0,\ t>0, \qquad (4)$$

находится при помощи преобразования Лапласа. Для температуры поверхности тела v_0 получена формула

$$v_0=\frac{2F_0T_1}{kT}\left(\frac{\alpha t}{\pi}\right)^{1/2}+v_P-$$

$$-\frac{2F_0\alpha^{1/2}}{\pi kt}\int_0^\infty\frac{e^{-u^2t}(T-Te^{u^2T_1}-T_1+T_1e^{u^2T})\,du}{u^2(1-e^{u^2T})}. \qquad (5)$$

При больших значениях t интегралом в (5) можно пренебречь, и v_0 выражается в виде суммы периодической части v_P и первого члена (5), который соответствует нагреванию поверхности средним потоком F_0T_1/T, начавшимся при $t=0$.

Сравнивая решение в форме (5) с решением для первого периода

$$v_0=\frac{2F_0}{k}\left(\frac{\alpha t}{\pi}\right)^{1/2},\quad 0<t<T_1, \qquad (6)$$

$$v_0=\frac{2F_0\alpha^{1/2}}{k\pi^{1/2}}\{t^{1/2}-(t-T_1)^{1/2}\},\ T_1<t<T, \qquad (7)$$

автор получает формулы для v_P. Приведены графики значений v_P в начале и в конце периода нагревания для различных $\frac{T_1}{T}$.

Во второй части работы рассматривается задача, когда поток (1) подводится к части границы, ограниченной окружностью. При этом предполагается, что через остальную часть поверхности потерь тепла нет. Без вывода приводится формула для периодической части v_P температуры в центре окружности.

В. И. Моссаковский

4042. Теплообмен между нагретой лентой и конвекционным потоком. Хербек (Der Wärmeaustausch zwischen einem geheizten Band und einer Konvektionsströmung. Herbeck M.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 10—11, 362—382 (нем.; резюме англ., франц., русск.)

Решается задача об установившемся поле температуры в воздушном потоке ($y\geqslant 0$, скорость параллельна оси Ox, пропорциональна y и не зависит от x и z) в случае, когда имеется лента $\left(y=0,\ |x|<\frac{b}{2},\ -\infty<z<\infty\right)$ с постоянной температурой, отличной от температуры потока в бесконечности. Эта задача сводится к следующей: в области $\eta>0$ найти функцию $T(\xi,\eta)$, удовлетворяющую уравнению

$$T_{\xi\xi}+T_{\eta\eta}=\eta T_\xi \qquad (1)$$

при условиях: 1) $T=1\left(|\xi|<\frac{l}{2},\ \eta=0\right)$, 2) $T\to 0$ $(\eta\to\infty)$. Этих условий недостаточно для единственности, и автор решает задачу при нескольких предположениях о значениях T для $|\xi|>\frac{l}{2}$, $\eta=0$.

Уравнению (1) при любом α удовлетворяет функция

$$T_p = e^{i\alpha(\xi+\xi_0)}(\alpha^2+i\alpha\eta)^{1/2}\,Z_{1/3}\left[\frac{2}{3\alpha}(\alpha^2+i\alpha\eta)^{3/2}\right],$$

где $Z_{1/3}$ — цилиндрическая функция порядка $1/3$. Решение задачи представляется интегралом Фурье. Для каждого решения находится число Нуссельта

$$\mathrm{Nu} = \int_{-l/2}^{l/2} (T_\eta)_{\eta=0}\,d\xi,$$

характеризующее теплообмен между лентой и потоком. Полученные числа Nu сравниваются с результатами эксперимента. *Х. Л. Смолицкий*

4043. Об одной нелинейной задаче распространения тепла в среде, обладающей сферической симметрией. Манфреди (Sopra un problema non lineare di propagazione del calore per un mezzo dotato di simmetria sferica. Manfredi Bianca), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, 4, № 1—2, 123—132 (итал.)

Задача сводится к уравнению $U_t = U_{rr} + 2/r\,U_r$ $(r>a,\ t>0)$, которое нужно решить при условии $0<U<1$, краевом условии

$$-[U_r]_{r=a} = G[U(a,\ t)], \qquad (1)$$

где $G(y)$ — неотрицательная убывающая непрерывная функция $(0\leqslant y\leqslant 1,\ G(1)=0)$, и начальном условии $[U]_{t=0}=0$ $(r\geqslant a)$. Операционным методом получается ответ:

$$U(r,\ t) = G[U(a,\ t)] * F(a,\ r,\ t), \qquad (2)$$

где $*$ — «свертка» и

$$F(a,\ r,\ t) = \frac{a}{r}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(r-a)^2}{4t}\right] - \frac{1}{a}\exp\left(\frac{r-a}{4}+\frac{t}{a^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{r-a}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{a}\right)\right\},$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\xi^2}d\xi.$$

Температура $y(t) = U(a,\ t)$ на сферической поверхности среды определяется из нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(t) = G[y(t)] * F(a,\ a,\ t), \qquad (3)$$

где $F(a,\ a,\ t) =$ оригинал для $\left(\frac{1}{1/a+\sqrt{p}}\right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \frac{1}{a}\exp\frac{t}{a^2}\cdot\operatorname{erfc}\frac{\sqrt{t}}{a}.$$

Обратно, всякое решение уравнения (3), подставленное в (2) вместо $U(a,\ t)$, дает решение рассматриваемой задачи. При исследовании интегрального уравнения (3) рассуждения автора содержат ряд необоснованных и неточных утверждений. *М. К. Фаге*

4044. О нестационарной диффузии в слоистых средах. Деег (Über nichtstationäre Diffusion in geschichteten Medien. Deeg Emil), Z. angew. Phys., 1953, 5, № 10, 370—374 (нем.)

В связи с отливкой керамики в гипсовых формах возникает следующая задача: две среды (гипс и керамическая масса) занимают пространственные слои $(1)\ -d_1\leqslant x\leqslant 0$ и $(2)\ 0\leqslant x\leqslant d_2$; искомая концентрация воды $c(x,\ t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{1}{D_1}\frac{\partial c}{\partial t} = 0 \text{ в (1) и } \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{1}{D_2}\frac{\partial c}{\partial t} = 0 \text{ в (2)},$$

краевым условиям $c|_{x=-d_1}=0$ (сухая внешняя стенка гипсовой формы) и $\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=d_2}=0$ (симметрия относительно срединной плоскости $x=d_2$), а также условиям сопряжения на плоскости раздела

$$D_1\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=-0} = D_2\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=+0}$$

(непрерывность диффузионного потока) и $c|_{x=-0} = L_{12}\,c|_{x=+0}$ (D_1 и D_2 — постоянные коэффициенты диффузии; L_{12} — постоянный коэффициент распределения). Решение ищется в виде $c=\psi_1(x)\exp(-\lambda_1^2 D_1 t)$ в (1) и $c=\psi_2(x)\exp(-\lambda_2^2 D_2 t)$ в (2). Тогда $\psi_1(x) = \alpha_1\cos\lambda_1 x + \beta_1\sin\lambda_1 x$, $\psi_2(x)=\alpha_2\cos\lambda_2 x+\beta_2\sin\lambda_2 x$, где $\lambda_2 = \lambda_1\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}$, λ_1 должно удовлетворять уравнению

$$L_{12}\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\operatorname{ctg}(\lambda_1 d_1) = \operatorname{tg}\left(\lambda_1 d_2\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\right)$$

и $\alpha_2 = \alpha_1\frac{1}{L_{12}}$, $\beta_2 = \beta_1\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}$, $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \operatorname{ctg}(\lambda_1 d_1)$, а α_1 — произвольная постоянная. Собственным значениям $\lambda_1^{(s)}$ и $\lambda_2^{(s)}$ соответствуют собственные функции

$$\psi_1^{(s)}(x) = \alpha_1^{(s)}\{\cos(\lambda_1^{(s)}x) + \operatorname{ctg}(\lambda_1^{(s)}d_1)\sin(\lambda_1^{(s)}x)\} \equiv \equiv \alpha_1^{(s)}\varphi_1^{(s)}(x)$$

и

$$\psi_2^{(s)}(x) = \alpha_1^{(s)}\frac{1}{L_{12}}\{\cos(\lambda_2^{(s)}x) + \operatorname{tg}(\lambda_2^{(s)}d_2)\sin(\lambda_2^{(s)}x)\} \equiv \equiv \alpha_1^{(s)}\varphi_2^{(s)}(x),$$

для которых выполняется «условие ортогональности»

$$\alpha_1^{(s)}\alpha_1^{(r)}D_1\left\{\int_{-d_1}^{0}\varphi_1^{(s)}(x)\,\varphi_1^{(r)}(x)\,dx + L_{12}\int_0^{d_2}\varphi_2^{(s)}(x)\,\varphi_2^{(r)}(x)\,dx\right\} = \delta_{sr}.$$

Это соотношение позволяет решить задачу при любом начальном условии $c|_{t=0}=f_1(x)$ в (1) и $c|_{t=0}=f_2(x)$ в (2): именно, если

$$f_1(x) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s\psi_1^{(s)}(x),\quad f_2(x) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s\psi_2^{(s)}(x),$$

то искомое решение имеет вид

$$c(x,\ t) = \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{\infty} A_s\psi_1^{(s)}(x)\exp[-(\lambda_1^{(s)})^2 D_1 t] \text{ в (1)}, \\ \sum\limits_{s=0}^{\infty} A_s\psi_2^{(s)}(x)\exp[-(\lambda_2^{(s)})^2 D_2 t] \text{ в (2)}. \end{cases}$$

Задача обобщается на n слоев. Приводятся графики $c(x, t)$ для одного числового примера, на котором также выясняется, насколько полученное решение, учитывающее конечную толщину слоев, отличается от более простого решения задачи в случае сред, занимающих два полупространства: в окрестности плоскости раздела эти решения близки друг к другу лишь для малых t.

В. И. Левин

4045. Диффракция плоских электромагнитных волн на полубесконечном круглом волноводе. Пирсон (The diffraction of electro-magnetic waves by a semi-infinite circular wave guide. Pearson J. D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 4, 659—667 (англ.)

Решается задача о диффракции произвольной плоской электромагнитной волны на полубесконечном круглом волноводе (трубе) с бесконечно тонкой идеально проводящей стенкой (расположенной при $\rho = a$, $z \geqslant 0$, где ρ, θ, z — цилиндрические координаты). Возникающее при этом диффракционное электромагнитное поле ищется в виде ряда Фурье

$$\boldsymbol{E} = \sum_n \boldsymbol{E}^{(n)} e^{in\theta}, \quad \boldsymbol{H} = \sum_n \boldsymbol{H}^{(n)} e^{in\theta}.$$

Используя уравнения Максвелла и граничные условия на стенке волновода

$$E_z + E_{0z} = 0, \quad E_\theta + E_{0\theta} = 0 \quad (\rho = a,\ z \geqslant 0),$$

где E_{0z} и $E_{0\theta}$ — составляющие электрического поля падающей плоской волны, автор ищет далее $\boldsymbol{E}^{(n)}$ и $\boldsymbol{H}^{(n)}$ при помощи преобразования Лапласа. Для функций $\boldsymbol{e}^{(n)}(s)$ и $\boldsymbol{h}^{(n)}(s)$, возникающих при этом преобразовании, получается система функциональных уравнений, которая решается в замкнутом виде, для чего используются свойства этих функций во всей плоскости комплексного переменного s. Таким путем автор приходит к строгому решению поставленной задачи, которое в конце статьи несколько конкретизируется в отношении полей внутри волновода ($\rho \leqslant a$, $z > 0$).

Заметим, что полученное решение имеет формальный характер, численные результаты и методы вычислений отсутствуют. Что же касается самого метода решения, то он принципиально не отличается от метода, примененного ранее референтом (Ж. техн. физики, 1951, **21**, № 3, 328—345; Диффракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, Изд-во «Сов. радио», М., 1953) при решении задач о диффракции электромагнитной волны с произвольной азимутальной зависимостью, распространяющейся внутри полубесконечного круглого волновода по направлению к его концу.

Л. А. Вайнштейн

4046. Некоторые приложения теории светового поля. Мун, Спенсер (Some applications of photic field theory. Moon Parry, Spencer Domina Eberle), J. Franklin Inst., 1953, **255**, № 2, 113—126 (англ.)

В предыдущей статье авторов (РЖМат, 1954, 3338) были изложены методы, которые задачу расчета светового поля в ряде случаев приводят к решению предельной задачи для уравнения Лапласа. В реферируемой статье рассматриваются элементарные примеры применения этих методов. В качестве источников рассматриваются поверхностные источники равномерной яркости, распределенные по координатным поверхностям различных ортогональных криволинейных систем координат. Для таких поверхностных источников существует квазипотенциал Φ, зависящий от одной переменной, $\Phi = \Phi(\eta)$. Уравнение Лапласа для Φ в рассмотренных примерах приводится к простейшим видам, как, например:

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} = 0, \quad \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d\Phi}{d\eta} = 0, \quad \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \operatorname{ctgh}\eta\,\frac{d\Phi}{d\eta} = 0,$$

что позволяет легко указать его общее решение.

Световой спектр $\mathbf{D} = -\frac{1}{\zeta}\nabla\Phi$ на поверхности таких источников, как с учетом многократных отражений, так и без учета их, постоянен по величине и направлен по нормали к поверхности источника.

Из граничного условия для $\mathbf{D}$ определяется нормальная производная от Φ на поверхности источника и определяется множитель ζ. В большинстве случаев граничная задача ставится для внешней области, причем $\mathbf{D}$ должен обращаться в нуль на бесконечности.

П. П. Касьянков

4047. Устанавливающиеся электромагнитные процессы в проводных линиях бесконечной длины при включении переменного тока. Кузнецов В. Н., Сб. научн. работ по проводной связи АН СССР, 1953, № 2, 13—30

Решается система телеграфных уравнений

$$-\frac{\partial E}{\partial x} = RI + L\frac{\partial I}{\partial t}, \quad -\frac{\partial I}{\partial x} = GE + C\frac{\partial E}{\partial t} \qquad (1)$$

при граничном условии

$$E(0,t) = E_0 e^{i\omega_0 t + i\varphi}$$

и нулевых начальных условиях. Решение дается при помощи интегралов Фурье, которые заменяются контурными интегралами. После некоторых преобразований они выражаются при помощи показательных функций, которые характеризуют установившийся режим, и рядов, содержащих функции Бесселя.

Подобная задача иным путем решена референтом (РЖМат, 1953, 309).

Э. Я. Риекстыньш

4048. Поперечная электромагнитная волна коаксиальной линии как вырожденная волна волновода. Клейнвехтер (Die transversale elektromagnetische Lecherwelle des Koaxialkabels als entartete Hohlleiterwelle. Kleinwächter Hans), Arch. elektr. Übertrag., 1953, **7**, № 10, 467—469 (нем.)

Методом разделения переменных решается волновое уравнение и исследуется электромагнитное поле коаксиальной линии. Новых результатов статья не содержит.

П. П. Бирюлин

4049. Применение однократных и многократных преобразований Фурье к уравнениям в частных производных теоретической электротехники. Вецгер (Die Anwendung der ein- und mehrstufigen Fourier-Transformation auf partielle Differentialgleichungen der theoretischen Elektrotech-

nik. Wetzger Joachim), Frequenz, 1953, 7, № 5, 139—145 (нем.)

Работа является частью цикла сообщений (РЖМат, 1954, 3376, 3377).

Решена смешанная задача для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad (a \text{ — постоянное})$$

в области V $(0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant c,\ 0 \leqslant z \leqslant d)$, когда $u(x, y, z, t)$ на гранях параллелепипеда $x=0$, $y=0$, $z=0$ обращается в нуль, а на остальных гранях и при $t=0$ значения $u(x, y, z, t)$ равны заданным интегрируемым в V функциям. Задача решена при помощи трехкратного конечного преобразования Фурье, для применения которого данные функции и искомая функция $u(x, y, z, t)$ продолжены в расширенную область V' $(0 \leqslant t \leqslant T,\ |x| \leqslant b,\ |y| \leqslant c,\ |z| \leqslant d)$ как нечетные функции относительно x, y, z. Решение получено в виде интегралов от трехкратных рядов Фурье. Оно может быть формально получено методом Фурье.

Э. Я. Риекстыньш

4050. О теории рассеяния для релятивистских уравнений. Коринальдези (On the scattering theory of relativistic equations. Corinaldesi E.), Nuovo cimento, 1953, 10, № 12, 1673—1680 (англ.)

При помощи метода Парцена (Phys. Rev., 1950, 80, 261—265; 1951, 81, 808) рассчитывается фаза для асимптотического поведения решений уравнений Клейна—Гордона и Дирака при больших энергиях частиц (при больших волновых числах k). Задача рассматривается для случая потенциала, имеющего полюс в начале координат:

$$V = \frac{\alpha_{-1}}{r} + \alpha_0 + O(r).$$

Уравнение Клейна — Гордона записывается в виде

$$G_l'' + \left(k^2 - 2EV + V^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) G_l = 0.$$

Асимптотическое представление решения на бесконечности берется в форме

$$G_l \sim A_l(k) \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} - \frac{b}{k} \ln 2kr - \delta_l(k)\right),$$

где $\delta_l(k)$ — фаза.

Показано, что если потенциал V убывает на бесконечности значительно быстрее, чем $1/r$, то фаза δ_l растет как $\alpha_{-1} \ln k$ при $k \to \infty$. Аналогичный результат получен для уравнения Дирака.

Ю. Н. Днестровский

См. также: 3970, 3996 **РЕЦ**, 4051—4053, 4058, 4087, 4138, 4139, 4153, 4181, 4182, 4186, 4188

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4051. К теории некоторых линейных интегро-дифференциальных систем. Александрийский Б. И., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 2, 181—184

Рассматривается интегро-дифференциальная система

$$\varphi^{(n)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \varphi^{(i)}(x) - \lambda \sum_{i=0}^{m} \int_a^b K_i(x, s) \varphi^{(i)}(s)\, ds = f(x), \qquad (1)$$

$$\varphi(x_0) = \varphi^{(1)}(x_1) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(x_{n-1}) = 0,$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — произвольные точки $[a, b]$. Сведение системы (1) к интегральному уравнению Фредгольма исследовал А. И. Некрасов (Тр. ПАГИ, 1934, вып. 190). Автор применяет метод, отличный от метода упомянутой работы А. И. Некрасова.

λ_0 названо собственным значением, если при $\lambda = \lambda_0$ и $f(x) = 0$ система (1) имеет ненулевое решение, в противном случае — несобственным. Система (1) названа неособенной, если имеется по крайней мере одно несобственное значение, в противном случае — особенной.

Строятся по коэффициентам $a_i(t)$ и ядрам K_i новые ядра $Q(x, s)$ и $Q_j'(x, s)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, при помощи которых система (1) может быть приведена к более простой. Например, если система (1) неособенная и $n < m$, то она приводится к уравнению

$$u(x) - \lambda \sum_{j=0}^{m-n} \int_a^b \left[Q_j'(x, s) + \int_a^b R(x, t, 1) Q_j'(t, s)\, dt \right] \times u^{(j)}(s)\, ds = f(x) + \int_a^b R(x, t, 1) f(t)\, dt,$$

где $R(x, t, 1)$ — резольвента $Q(x, s)$, $u(x) = \varphi^{(n)}(x)$. Если система (1) особенная и $n < m$, то она сводится к уравнению

$$u(x) - \lambda \sum_{j=0}^{m-n} \int_a^b \left[Q_j'(x, s) + \int_a^b T(x, t, 1) Q_j'(t, s)\, dt \right] \times u^{(j)}(s)\, ds = \sum_{i=1}^{q_\lambda} c_i \psi_{r_i^\lambda}(x, 1),$$

где c_i — произвольные постоянные. $\psi_{r_i^\lambda}(x, 1)$ — определенные собственные функции ядра, $Q(x, s)$, $T(x, s, 1)$ — обобщенная резольвента того же ядра.

З. И. Халилов

4052. Об одном свойстве классических функций Грина первого и второго рода. Беккерт (Eine Eigenschaft der klassischen Greenschen Funktionen erster und zweiter Art. Beckert Herbert), Math. Nachr., 1953, 10, № 1—2, 55—61 (нем.)

Пусть D — простая односвязная область класса B в смысле Лихтенштейна, S — ее граница, $G^{(1)}(x, y, s, t)$, $G^{(2)}(x, y, s, t)$ — функции Грина первого

и второго рода в области D, обладающие свойствами:

$$\Delta G^{(1)} = 0 \text{ при } \binom{x}{y} \neq \binom{s}{t},\ G^{(1)}(P, s, t) = 0$$

($P \in S$, точка (s, t) внутри D),

$$\Delta G^{(2)} = \frac{2\pi}{F} \text{ при } \binom{x}{y} \neq \binom{s}{t},\ \frac{\partial G^{(2)}}{\partial n_p}(P, s, t) = 0,$$

$$\iint\limits_D G^{(2)}(x, y, s, t)\, ds\, dt = 0,$$

где n_p — направление внутренней нормали, а F — площадь D. Доказывается теорема:

Пусть $p(x, y)$ и $q(x, y)$ ограничены и измеримы в области $D + S$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы существовала функция $w(x, y)$, удовлетворяющая в этой области условию Липшица, и такая, что почти всюду $w_x = p$, $w_y = q$, является равенство

$$\iint\limits_D \left\{ -\frac{\partial G^{(1)}(x, y, s, t)}{\partial x} w_y(x, y) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial G^{(1)}(x, y, s, t)}{\partial y} w_x(x, y) \right\} dx\, dy = 0. \qquad \text{(b)}$$

Если это равенство выполняется, то функция $w(x, y)$ однозначно определяется с точностью до аддитивной постоянной и удовлетворяет уравнению

$$w(s, t) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_D \left\{ \frac{\partial G^{(2)}}{\partial y} w_y(x, y) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial G^{(2)}}{\partial x} w_x(x, y) + \frac{2\pi}{F} w(x, y) \right\} dx\, dy. \qquad \text{(a)}$$

Результат автора находится в соответствии с леммой Хаара в вариационном исчислении и с ее обращением, принадлежащим Шаудеру (Schauder J., Acta Univ. hung., 1928, 4, 38—50), и легко обобщается путем повторного применения формулы (a) на тот случай, когда вместо частных производных первого порядка заданы все частные производные порядка n ($n = 2, 3, \ldots$).

В заключение автор дает приложения своих теорем. Например, устанавливает:

Если последовательность функций $\{\varphi_n(x, y)\}$ удовлетворяет условию

$$\iint\limits_D \left\{ \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right|^p + \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right|^p \right\} dx\, dy \to 0$$

при $m, n \to 0$ и $p > 0$, то для ее равномерной сходимости достаточно, чтобы интегралы

$$\iint\limits_{K_\rho} \left| \frac{\partial \log r(s, t, x, y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right| dx\, dy$$

и

$$\iint\limits_{K_\rho} \left| \frac{\partial \log r(s, t, x, y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right| dx\, dy,$$

где $r = \sqrt{(s-x)^2 + (t-y)^2}$, K_ρ — круг радиуса ρ и точка (s, t) лежит внутри D, равномерно стремились к нулю при $\rho \to 0$. *П. Д. Калафати*

4053. Решение одного интегрального уравнения теории ньютоновского потенциала. Леонов М. Я., Украинский матем. ж., 1953, 5, № 1, 50—57

Строится явное решение интегрального уравнения

$$u(x, y) = \iint\limits_S \frac{p(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta, \qquad (1)$$

где S представляет часть плоскости xy, лежащую внутри (S_a) или вне ($\overline{S_a}$) окружности

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

функция $u(x, y)$ задана в S.

Вводится функция $U(x, y, z)$ — потенциал масс, распределенных в S_a с неизвестной плотностью $p(x, y)$, причем $U(x, y, 0) = u(x, y)$ в S_a; для $z = 0$ она представляется интегралом

$$U(x, y, 0) = -\iint\limits_{S_a} u(\xi, \eta)\, \mu(\xi, \eta; x, y)\, d\xi\, d\eta,$$

где

$$\mu(\xi, \eta; x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, y, 0; \xi, \eta, \zeta)\Big|_{\zeta=+0},$$

а $G(x, y, 0; \xi, \eta, \zeta)$ есть функция Грина задачи Дирихле.

Ссылаясь на свою предыдущую работу, автор показывает, что

$$4\pi^2 p(X, Y) = \iint\limits_{S_a} u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \iint\limits_{\overline{S_a}} \frac{\mu(\xi, \eta; x, y)\, dx\, dy}{[(X-x)^2 + (Y-y)^2]^{3/2}} -$$

$$- \Delta \iint\limits_{S_a} \frac{u(\xi, \eta)}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta. \qquad (2)$$

Равенство это имеет смысл при $(X, Y) \in S_a$, где и ищется p. Таким образом, задача приводится к определению функции $\mu(\xi, \eta; x, y)$. Предлагается способ прямого нахождения функции

$$I(\xi, \eta) = \iint\limits_{\overline{S_a}} \frac{\mu(\xi, \eta; x, y)}{[(X-x)^2 + (Y-y)^2]^{3/2}}\, dx\, dy,$$

входящей в формулу (2), что позволяет решение уравнения (1) представить в виде

$$p(x, y) = \iint\limits_S K(x, y; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - L(x, y), \qquad (3)$$

где

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{a}{2\pi^2 \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)(a^2 - \xi^2 - \eta^2)}} \times$$

$$\times \frac{1}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \frac{1}{2\pi^2 [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} \times$$

$$\times \arcsin \frac{a\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)(a^2-\xi^2-\eta^2) + a^2[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]}},$$

$$L(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\Sigma \to S} \Delta \iint\limits_{\Sigma} \frac{u(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta,$$

причем Σ есть области, ограниченные окружностями. Показывается также, что решение сохраняет вид (3) и в том случае, когда S совпадает с S_a. *В. Д. Купрадзе*

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4054. Вариационный метод в задачах переноса излучения. I. Изотропное рассеяние с постоянным потоком. Хуан Су-шу (The variational method for problems of radiative transfer. I. Isotropic scattering with a constant net flux. Huang Su-Shu), Astrophys. J., 1953, **117**, № 1, 211—214 (англ.)

Задача сводится к интегральному уравнению Милна — Шварцшильда

$$J(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty J(\tau') E_1(|\tau - \tau'|)\, d\tau'; \qquad (1)$$

здесь и далее положено

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xv}}{v^n}\, dv.$$

Неизвестная $J(\tau)$ должна иметь вид $J(\tau)=\tau+q(\tau)$, где $q(\tau)$ стремится к конечному пределу при $\tau\to\infty$. Функция $q(\tau)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$q(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty q(\tau') E_1(|\tau - \tau'|)\, d\tau' + \frac{1}{2} E_3(\tau),$$

которое показывает, что $q(\tau)$ сообщает стационарное значение интегралу

$$\mathfrak{F}(q) = \int_0^\infty q(\tau)\left\{ q(\tau) - \frac{1}{2}\int_0^\infty q(\tau') E_1(|\tau-\tau'|)d\tau'\right\} d\tau - \int_0^\infty q(\tau) E_3(\tau)\, d\tau.$$

Приближенное значение $q(\tau)$ строится в виде

$$q(\tau) = A_1 + \sum_{n=2}^{5} A_n E_n(\tau); \qquad (2)$$

коэффициенты A_n определяются по методу Ритца. Приводится таблица значений $J(\tau)$, вычисленных по формуле (2); для сравнения приводятся две серии значений $J(\tau)$, одна из которых вычислена ранее автором с помощью другого приближенного метода (Phys. Rev., 1947, 71, 688), а другая вычислена Марком (Mark C., Phys. Rev., 1947, 72, 558) с помощью точного аналитического решения. Сравнение показывает высокую точность формулы (2). *С. Г. Михлин*

4055. Вариационный метод в задачах переноса излучения. II. Образование линий поглощения в модели Милна — Эддингтона. Хуан Су-шу (The variational method for problems of radiative transfer. II. The formation of absorption lines in the Milne-Eddington model. Huang Su-Shu), Astrophys. J., 1953, **117**, № 1, 215—220 (англ.)

Задача сводится к исследованию интегрального уравнения

$$J(t) = (1-\Lambda_0)(c_0 + c_1 t) + \frac{1}{2}\Lambda_0\int_0^\infty J(t') E_1(|t-t'|)\, dt'$$

на бесконечности. $J(t)$ ищется в форме $c_0 + c_1 t + q_0(t)$. Здесь Λ_0, c_0, c_1 — данные постоянные, m — положительный корень уравнения $\Lambda_0 \operatorname{Arth} m = m$, A_1 — неизвестная постоянная. Значение $E_n(t)$ указано в реф. 4054. Функция $q_0(t) = J(t) - c_0 - c_1 t$, равная нулю на бесконечности, сообщает стационарное значение функционалу

$$\mathfrak{F}(q) = \int_0^\infty q(t)\left\{ q(t) - \frac{1}{2}\Lambda_0\int_0^\infty q(t') E_1(|t-t'|)\, dt'\right\} dt - \Lambda_0\int_0^\infty q(t)\,[c_1 E_3(t) - c_0 E_2(t)]\, dt.$$

Простейшее приближенное значение $q_0(t)$ ищется в виде $q_0(t) = A_1 e^{-mt}$; коэффициент A_1 определяется по методу Ритца, который дает

$$A_1 = \frac{2m^2}{\ln(1-m^2)}\left\{ c_0\left[\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}\ln(1+m)\right] - c_1\left[\frac{1}{2m} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3}\ln(1+m)\right]\right\}$$

Для получения более точного значения автор рекомендует брать $q_0(t)$ в виде

$$q_0(t) = A_1 e^{-mt} + \sum_{n=2}^{N} A_n E_n(t).$$

Коэффициенты системы, из которой по методу Ритца определяются неизвестные A_n, выражаются через величины $\varphi_n(-m)$, $\Phi_n(-m)$, i_{ks}, I_{ks}, где

$$\varphi_n(\lambda) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^n(x+\lambda)}, \quad \Phi_n(\lambda) = \int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^n(x+\lambda)}\, dx,$$

$$i_{ks} = \int_0^\infty E_k(t) E_s(t)\, dt,$$

$$I_{ks} = \int_0^\infty\int_0^\infty E_k(t) E_s(t') E_1(|t-t'|)\, dt\, dt'.$$

Приводятся значения A_n для $N=2$; более подробные численные расчеты проделаны для $\Lambda_0 = 0{,}8$. *С. Г. Михлин*

4056. Вариационный метод в задачах переноса излучения. III. Эффект отражения. Хуан-Су-шу (The variational method for problems of radiative transfer. III. Reflection effect. Huang Su-Shu), Astrophys. J., 1953, **117**, № 1, 221—224 (англ.)

Задача сводится к решению интегрального уравнения

$$J(t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty J(t') E_1(|t-t'|)\, dt' + \frac{1}{4} F e^{-t/\mu_0}, \qquad (1)$$

где F и μ_0 — постоянные, $J(t)$ стремится к конечному пределу при $t\to\infty$, а

$$E_n(t) = \int_1^\infty \frac{e^{-tv}}{v^n}\, dv.$$

Решение уравнения (1) сообщает стационарное значение интегралу

$$\mathfrak{F} = \int_0^\infty J(t)\left\{J(t) - \frac{1}{2}\int_0^\infty J(t') E_1(|t-t'|)\,dt'\right\} dt - \frac{F}{2}\int_0^\infty J(t)\, e^{-t/\mu_0}\,dt.$$

Автор строит приближенное решение по методу Ритца, полагая

$$J(t) = A_0 + A_1 e^{-t/\mu_0} + \sum_{n=2}^{N} A_n E_n(t).$$

Вычисления коэффициентов A_n проведены для $N=4$ и $\mu=0{,}5$, $\mu=1$. Результаты хорошо согласуются с ранее выполненными вычислениями (Chandrasekhar S., Radiative Transfer, Oxford University Press, 1950, 80—87; Menzel D. H., Sen H. K., Astrophys. J., 1951, **113**, 490). *С. Г. Михлин*

4057. Критическое исследование интегрального описания метаболических систем. Вейсман (A critical investigation of the integral description of metabolizing systems. Wijsman Robert A.), Bull. Math. Biophys., 1953, **15**, № 3, 261—268 (англ.)

В ряде работ Бренсон описал метаболические системы при помощи интегральных уравнений

$$M(t) = M(0)F(t) + \int_0^t R(\theta) F(t-\theta)\,d\theta \qquad (1)$$

и

$$M(t) = M(0)F[M(0), t] + \int_0^t R(\theta) F[M(\theta), t-\theta]\,d\theta \qquad (2)$$

(Branson H., Bull. Math. Biophys., 1946, 8, 159—165; Arch. Biochem. Biophys., 1952, **36**, 48—59). В этих уравнениях $M(t)$ составляет значение метаболита в момент t, F есть метаболическая функция, а R — аккумуляционная функция.

Автор показывает, что применение уравнения Бренсона возможно лишь при существенных ограничениях.

Автор разбирает случай, когда вид функции F, входящей в равенство (2), зависит от $M(0)$ и $R(t)$; при этом он ограничивается рассмотрением метаболитов без возраста, которые и были только рассмотрены Бренсоном. Для того чтобы легче разобраться в уравнениях (1) и (2), он вводит функцию $E(\theta, t)$, которая представляет собою часть вещества в момент t, оставшуюся от количества вещества, введенного в момент θ, и приходит к выводу, что только в метаболических реакциях первого рода $E(\theta, t) = F(t-\theta)$ и представляет собою показательную функцию: $E(\theta, t) = \exp[-c(t-\theta)]$. Во всех других случаях $E(\theta, t)$ не может быть функцией только разности $(t-\theta)$ и существует даже тогда, когда $R(t)$ отрицательна в некоторых промежутках. В этом случае уравнение (2) неприменимо. Вместо него нужно пользоваться уравнением

$$M(t) = M(0)E(0, t) + \int_0^t R(\theta) E(\theta, t)\,d\theta,$$

полезность которого кажется автору сомнительной. *М. М. Вайнберг*

4058. Интегральные уравнения стесненного кручения и устойчивости тонкостенных стержней. Болотин В. В., Прикл. матем. и механика, 1953, **17**, № 2, 245—248

В рамках теории В. З. Власова рассматривается дифференциальное уравнение стесненного кручения тонкостенных стержней

$$\frac{d^4\theta}{dz^4} - \frac{k^2}{l^2}\frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{m}{EI_\omega},$$

где θ — угол закручивания, $m = m(z)$ — внешний крутящий момент; остальные входящие в уравнение коэффициенты — постоянные. Введя так называемый бимомент $B = -EI_\omega\, d^2\theta / dz^2$, получаем

$$\frac{d^2B}{dz^2} - \frac{k^2}{l^2} B = -m(z). \qquad (1)$$

Вводится функция Грина $G(z; \zeta)$ для оператора d^2/dz^2 при граничных условиях для бимомента (эти условия не формулируются); уравнение (1) сводится к интегральному уравнению

$$B(z) - \lambda\int_0^l G(z; \zeta) B(\zeta)\,d\zeta = \int_0^l G(z; \zeta) m(\zeta)\,d\zeta; \qquad \lambda = -\frac{k^2}{l^2}.$$

Автор рекомендует решать его последовательными приближениями или по формуле Гильберта — Шмидта. Заметим, что в этом нет надобности, так как уравнение (1) интегрируется элементарно. Определив $B(z)$, находим

$$\theta(z) = \frac{1}{EI_\omega}\int_0^l H(z; \zeta) B(\zeta)\,d\zeta,$$

где $H(z; \zeta)$ — функция Грина для оператора d^2/dz^2 при граничных условиях для угла закручивания (которые также не формулируются).

Рассмотрена задача об устойчивости плоской формы изгиба тонкостенного стержня. Используя дифференциальные уравнения устойчивости, полученные В. З. Власовым, автор приходит к интегральному уравнению для угла закручивания:

$$\theta(z) - \beta^2\int_0^l p(\zeta) K(z; \zeta)\,\theta(\zeta)\,d\zeta = 0. \qquad (2)$$

Здесь β — параметр, $p(\zeta)$ — функция, пропорциональная квадрату изгибающего момента от внешней нагрузки, и

$$K(z; \zeta) = \int_0^l H(z; \eta) G(\eta; \zeta)\,d\eta + \lambda\int_0^l\int_0^l H(z; \eta) R(\eta, \xi; \lambda) G(\xi; \zeta)\,d\eta d\xi;$$

$R(z, \zeta; \lambda)$ — резольвента ядра $G(z; \zeta)$.

В общем случае ядро K несимметрично, но оно симметризируемо посредством ядра G (слева) или ядра H (справа). Утверждается, что все собственные числа ядра K вещественные и положительные. Для их вычисления автор рекомендует либо заме-

нить ядро K вырожденным, сохраняя конечное число слагаемых в ряде

$$K(z;\zeta)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_m(z)\,\varphi_m(\zeta)}{\nu_{mn}},$$

где

$$\nu_{mn}=\frac{1}{\mu_m(\lambda_n-\lambda)}\int_0^l\psi_m(z)\,\varphi_n(z)\,dz,$$

а λ_n, φ_n и μ_m, ψ_m суть фундаментальные числа и функции ядер G и H соответственно, либо воспользоваться методом механических квадратур. Как указывает автор, последний метод приводит к тем же результатам, что и обычные методы строительной механики. *С. Г. Михлин*

См. также: 3989, 4013, 4043, 4045

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4059. Двумерные задачи вариационного исчисления в непараметрической форме. Сигалов А. Г., Тр. Моск. матем. об-ва, 1953, **2**, 201—233

В работе рассматривается проблема существования абсолютного минимума интегралов общего вида

$$\iint_D F(x,y,z,p,q)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Доказывается теорема существования абсолютно непрерывных решений при следующих условиях:

1. Нижняя грань диаметров компонент границы области D положительна.

2. Существуют числа $m>0$ и L^2 такие, что

$$F(x,y,z,p,q)\geqslant m(p^2+q^2) \text{ при } (x,y)\in\overline{D},$$
$$p^2+q^2\geqslant L^2 \text{ и } |z|\leqslant z_0.$$

3. $\mathcal{E}(x,y,z,p,q,\bar{p},\bar{q})\geqslant 0$ для всех значений аргументов, где $\mathcal{E}$ — обычная функция Вейерштрасса.

4. Существуют непрерывная выпуклая функция $\varphi(p,q)$ и постоянные L_1 и L_2 такие, что

$$L_1\cdot\varphi(p,q)\leqslant F(x,y,z,p,q)\leqslant L_2\cdot\varphi(p,q)$$

при $(x,y)\in\overline{D}$, $|z|\leqslant z_0$, p и q произвольных.

5. Подинтегральное выражение принадлежит к классу $C^{(1)}$ при $(x,y)\in\overline{D}$, $|z|\leqslant z_0$, p и q произвольных.

Допустимые функции подчиняются следующим требованиям:

а) $|f(x,y)|\leqslant z_0$;

б) f абсолютно непрерывна в области D и

$$(f,D,F)=\iint_D F(x,y,f,p,q)\,dx\,dy<\infty;$$

в) $f(x,y)$ принимает на границе области заданные непрерывные значения $\psi(x,y)$.

Утверждается, что если существует по крайней мере одна допустимая функция, то существует допустимая функция f_0, дающая интегралу (f,D,F) абсолютный минимум в классе всех допустимых функций. При этом

$$(f_0,D,F)=\inf\{\lim_{n\to\infty}(f_n,D_n,F)\},$$

где нижняя грань берется по всем последовательностям кусочно-линейных функций $f_n(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}_n\subset D$, $n=1,2,\ldots$, для которых график функции на границе области D_n сходится к графику функции $\psi(x,y)$.

Если отбросить ограничение $|f|\leqslant z_0$, наложенное на допустимые функции, то проблема существования минимума сводится к существованию ограниченной минимизирующей последовательности. Автор дает общие условия на выражение $F(x,y,z,p,q)$, при выполнении которых ограниченная минимизирующая последовательность существует.

Известно, что если решение $z(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица, то оно обладает теми же свойствами дифференцируемости и аналитичности, что и функция $F(x,y,z,p,q)$. В работе устанавливается, что при следующих условиях на подинтегральное выражение абсолютно непрерывное решение удовлетворяет условию Липшица в замкнутой области $\overline{D}_1\subset D$:

1) $F(x,y,z,p,q)$ дважды непрерывно дифференцируема по совокупности своих аргументов везде, где она определена;

2) $|F|+|F_z|+|F_{zx}|^2+|F_{zy}|^2+|F_p|^2+|F_q|^2\leqslant M(R)(p^2+q^2)$,

$$|F_{pp}|+|F_{pq}|+|F_{qq}|+|F_{pz}|+|F_{qz}|+|F_{zz}|\leqslant M(R);$$

$$|F_{px}|+|F_{qx}|+|F_{py}|+|F_{qy}|\leqslant M(R)(p^2+q^2)^{\frac{1}{\gamma}};$$

$$F_{pp}\alpha^2+2F_{pq}\alpha\beta+F_{qq}\beta^2\geqslant m(R)(\alpha^2+\beta^2)$$

при $|z|\leqslant R$, $p^2+q^2\geqslant L^2$, где $L=L(R)$, $m(R)$, $M(R)>0$ и γ — фиксированное число >2.

Примечание референта. На стр. 214 при определении функции φ теоремы 1 должно быть опущено условие $p^2+q^2\geqslant L^2$, иначе доказательство, проводимое автором в § 2, не проходит; на стр. 218 вместо $\beta\geqslant -2$ должно быть $\beta\geqslant 0$; на стр. 219 вместо $\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\gamma}{2}\geqslant -1$ должно стоять $\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\gamma}{2}\geqslant 0$. *Г. И. Шилова*

4060. Минимальные свойства кривых Рибокура. Бертолини (Proprietà di minimo delle curve di Ribaucour. Bertolini Fernando), Ann. mat. pura ed appl., 1953, сер. 4, **34**, 161—194 (итал.)

Пусть $n\neq 0$ — вещественное число, (a,c) и (b,d) — фиксированные точки в полуплоскости $y\geqslant 0$. Автор детально изучает проблему минимума функ-

ционала $J(L)=\int_L y^{1/n}\,ds$, где L — непрерывная спрямляемая кривая, лежащая в полуплоскости $y\geqslant 0$ и соединяющая точки (a, c) и (b, d). Экстремали этой задачи, не параллельные оси ординат, суть так называемые кривые Рибокура. Автор изучает геометрические свойства этих кривых и независимо от вышеуказанной вариационной задачи.

С. М. Ловинский

4061. Вариационные задачи на замкнутых многообразиях. Фет (Variational problems on closed manifolds. Fet A. I.), Amer. Math. Soc. Translation № 90, 1953, 61 pp. (англ.)

Перевод из Матем. сб., 1952, **30** (**72**), 271—316. Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 41.

См. также: 4011, 4028, 4052, 4054—4056, 4161, 4162

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

4062. Об одном типе задач, эффективно характеризующих владение идеей функции. Мей (A kind of problem that effectively tests familiarity with functional relations. May K. O.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 624 (англ.)

По данному графику $y=f(x)$, например, $f(x)=1$ при $x\leqslant -2$, $-x-1$ при $-2\leqslant x\leqslant 0$, -1 при $0\leqslant x\leqslant 1$, $x-2$ при $1\leqslant x$, построить графики $y=-f(x)$, $y=f(-x)$, $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $y=\operatorname{Arcsin} f(x)$ и т. п.

В. Л. Гончаров

4063. Одно замечательное тождество. Альфан (Une remarquable identité. Halphen Étienne), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, 1305—1306 (франц.)

Изучение некоторых функций, названных автором «факториальными» (C. r. Acad. sci, 1952, 235, 684), привело его к следующему тождеству:

$$\int_0^\infty e^{-z^2}(\cos xz+\sin xz)\frac{dz}{\sqrt{z}}=\int_0^\infty e^{-\left(z-\frac{x}{2}\right)^2}\frac{dz}{\sqrt{z}},$$

справедливому при произвольном действительном x. Автор приводит прямое доказательство этого тождества, принадлежащее Морля, разлагая правую и левую части в ряд Тейлора по степеням x.

М. Н. Олевский

4064. Суммы степеней последовательных натуральных чисел. Раковецкий (Sumy potęg kolejnych liczb naturalnych. Rakowiecki Tadeusz), Matematyka, 1953, **6**, № 6, 5—9 (польск).

С помощью бинома Ньютона автор получает формулы, из которых можно последовательно определить суммы степеней натуральных чисел. Работа не содержит новых результатов.

Ф. В. Широков

4065. О некоторых формулах Ф. Родеха. Карлиц (Note on some formulas of Rodeja F. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 4, 528—529 (англ.)

Пусть G_n и F_n — произвольные функции целочисленного аргумента. Дается новое весьма простое доказательство тождества

$$\sum_{m=k}^{n}\frac{G_n\prod_{\alpha=1}^{m-1}(F_n-F_\alpha)}{G_k\prod_{\alpha=1}^{k-1}(F_k-F_\alpha)\prod_{\alpha=k+1}^{m}(F_k-F_\alpha)}=\delta_{n,k}$$

$$(1\leqslant k\leqslant n).$$

М. А. Евграфов

4066 К. Дифференциальное исчисление. Лузин Н. Н., изд. 4-е, 476 стр., Изд-во «Советская наука», М., 1953, 11 руб.

Учебник состоит из 18 глав и приложения: Глава I. Элементарные формулы; Глава II. Число; Глава III. Величина; Глава IV. Функция; Глава V. Предел; Глава VI. Непрерывность; Глава VII. Дифференцирование; Глава VIII. Правила для дифференцирования алгебраических выражений; Глава IX. Различные приложения производной; Глава X. Последовательное дифференцирование и его приложения; Глава XI. Дифференцирование трансцендентных функций; Глава XII. Приложения к параметрическим уравнениям, полярным уравнениям и к корням; Глава XIII. Дифференциалы, Глава XIV. Кривизна. Радиус и круг кривизны; Глава XV. Теорема о среднем и ее приложения; Глава XVI. Частные производные; Глава XVII. Приложение частных производных; Глава XVIII. Кривые для справок; Приложение. Основы векторного анализа и его применение в теории пространственных кривых.

Книге предпослано введение «От издательства», в котором делается попытка на двух страницах осветить научные и общественные заслуги автора.

Д. А. Васильков

4067 К. Интегральное исчисление. Лузин Н. Н., изд. 4-е, 435 стр., Изд-во «Советская наука», М., 1953, 10 руб.

Учебник состоит из 12 глав: Глава I. Интегрирование. Правила непосредственного интегрирования; Глава II. Постоянная интегрирования; Глава III. Определенный интеграл; Глава IV. Интегрирование как процесс суммирования; приложения интегрального исчисления; Глава V. Формальное интегрирование различными приемами; Глава VI. Ряды; Глава VII. Комплексные числа, переменные, функции; Глава VIII. Дифференциальные уравнения; Глава IX. Кратные интегралы; Глава X. Криволинейный интеграл; Глава XI. Ряды Фурье; Глава XII. Метод акад. С. А. Чаплыгина приближенного интегрирования.

Д. А. Васильков

4068 К. Курс высшей математики [для техникумов]. Суворов И. Ф. 296 стр., Изд-во «Советская наука», М., 1953, 6 р. 85 к.

4069 К. Курс математического анализа. Т. I, Абдельхаи (Curso de análise matemática,

Vol. I. Abdelhay J., 2d ed., 16 + 232 pp., Universidade do Brasil, Rio de Janeiro, 1953), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 6, 613 (библ.)

4070 К. Анализ, Томас (Calculus. Thomas George Brinton, Jr, 614 pp., diagrs. (Addison-Wesley-math. ser.), Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1953, 6.50 doll.), Publisher's Weekly, 1954, **165**, № 1, 91 (библ.)

4071 К. Курс высшей математики [для техникумов]. Тарасов Н. П. Пер. на укр. с 7-го изд., 279 стр., Гостехиздат УССР, Киев, 1953, 7 р. 85 к. (библ.)

4072 РЕЦ. Высшая математика. Методы и проблемы XIX века. Рей Пастор (La matematica superior. Metodos y problemas del siglo XIX. Rey Pastor J., 360 pp., ill., Ibero-Americana, Buenos Aires — Madrid, 1951) [**Рецензия: Булиган** (Bouligand G.), Bull. sci. math., 1953, **127**, сер. 2, juillet-août, 107—109 (франц.)]

4073 РЕЦ. Математика в физике и химии. Маргенау, Мёрфи (Las matematicas de la fisica y de la quimica. Margenau Henry, Murphy Moseley George, XXIV + 760 pp. Ed. y Publ. Españolas, S. A. (Epesa), Madrid, 1952, 250 pesetas) [**Рецензия:** (G. D.), Euclides, 1953, **13**, № 148, 254 (исп.)]

4074 РЕЦ. Курс математики для колледжей. Эрс, Фрай, Джона (General college mathematics. Ayres W. L., Fry Cleota G., Jonah H. F. S., XII + 283 pp., McGraw-Hill Book Co., N. Y., 1952, 3.75 doll.) [**Рецензии: Гере** (Gere B. H.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 7, 486—487 (англ.); **Хёфингер** (Hofinger E.), Monatsh. Math., 1953, **57**, № 3, 257 (нем.)]

4075 РЕЦ. Практическая математика для инженеров и физиков. Цурмюль (Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Zurmühl R., XI + 481 S., 114 Abb., Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1953, 28.50 DM) [**Рецензии: Рорберг** (Rohrberg), Frequenz, 1953, **7**, № 11, 340 (нем.); **Петерс** (Peters), Bautechnik, 1953, **30**, № 12, 374 (нем.)]

4076 РЕЦ. Математика для радиотехников. Изд. 2-е. Шмид (Die Mathematik des Funktechnikers. Schmid Otto, 2. Aufl., 226 S., 348 Abb., Franckh'sche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart) [**Рецензия: Прокоп** (Prokop W.), Elem. Math., 1954, **9**, № 1, 23—24 (нем.)]

4077 РЕЦ. Математический справочник по технике переменного тока. Беккер, Фойгт (Mathematisches Hilfsbuch für die Wechselstromtechnik. Becker A., Voigt H., 4. Aufl. 426 S., 130 Bilder, Fachbuchverlag GmbH., Leipzig, 1952, 7.80 DM) [**Рецензия: Граф** (Graf U.), Elektrotechn. Z., Ausg. A., 1953, **74**, № 17, 523 (нем.)]

4078 РЕЦ. Введение в математику финансов и экономики. Тимпе (Einführung in die Finanz- und Wirtschaftsmathematik. Timpe A., 2. Aufl., VI + 217 S., Verlag für angewandte Wissenschaften, Wiesbaden, 1953, 17.80 DM) [**Рецензия: Хофрейтер** (Hofreiter N.), Monatsh. Math., 1953, **57**, № 3, 264 (нем.)]

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

4079. Теоремы неравносильности для методов суммирования. Мейер-Кёниг, Целлер (Inäquivalenzsätze bei Limitierungsverfahren. Meyer-König W., Zeller K.), Math. Z., 1953, **59**, № 2, 200—205 (нем.)

Пусть задан некоторый класс совместных методов суммирования A_α. Пусть $\mathfrak{N}_\alpha$ — поле суммируемости метода A_α, т. е. множество всех последовательностей $\{x_n\}$, суммируемых этим методом. Последовательность $\{x_n\}$ называется суммируемой $\bigcup A_\alpha$, если она принадлежит множеству $\bigcup \mathfrak{N}_\alpha$, где $\bigcup \mathfrak{N}_\alpha$ — сумма множеств $\mathfrak{N}_\alpha$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется суммируемой C_∞ к числу σ, если

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \sigma_n^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \sigma_n^{(k)} = \sigma,$$

где $\sigma_n^{(k)}$ — чезаровское среднее этой последовательности ($k \geqslant 0$). Аналогично определяются метод H_∞ для методов Гёльдера H_k и метод E_∞ для методов Эйлера E_k. Доказывается:

1. Если A и A_i, $i = 0,1,2,\ldots$, такие матрицы, что при всяком i существует последовательность, суммируемая A, но не суммируемая A_i, то существует последовательность, суммируемая A, но не суммируемая A_i ни при каком значении i.

2. Метод $H = \bigcup\limits_{k\geqslant 0} H_k$ неравносилен никакому методу суммирования, определяемому матрицей. То же самое справедливо для методов

$$C = \bigcup_{k\geqslant 0} C_k,\ E = \bigcup_{k\geqslant 0} E_k,\ C_\infty,\ H_\infty,\ E_\infty.$$

3. Методы E и E_∞ равносильны. Методы H и H_∞ неравносильны.

4. Если A и A_i, $i = 0,1,2,\ldots$, такие матрицы, что для каждого значения i имеется последовательность, суммируемая A, но не являющаяся A_i-ограниченной, то имеется и суммируемая A последовательность, не являющаяся A_i-ограниченной ни для какого значения i.

Доказательство последнего утверждения не приводится. *М. Д. Калашников*

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

4080. Бесселевы функции. Бекман (Besselovy funkce. Beckmann Petr), Slaboproudý obzor, 1953, **14**, № 9, P53—P62 (чеш.)

Статья носит обзорный характер. Заглавие характеризует ее содержание неточно, так как в ней даются определения и сжатый обзор основных свойств не только цилиндрических функций первого, но и второго и третьего рода.

Замечание об историческом развитии теории цилиндрических функций (стр. P53) содержит существенную неточность: автор указывает, что уравнение

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\,y = 0 \qquad (1)$$

было рассмотрено Эйлером лишь для целочисленных значений n, что не соответствует действительным результатам Эйлера (Гуссов В. В., Развитие теории цилиндрических функций в России и СССР, Историко-математические исследования, Гостехиздат, М., 1953, вып. 6, 366).

Получив обычным образом при помощи степенных рядов два линейно независимых решения уравнения (1):

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(n+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s},$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(s-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n},$$

автор определяет «функцию Неймана» равенством

$$N_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}.$$

Заметим, что правая часть этого равенства в современных руководствах по теории цилиндрических функций принимается за канонический вид цилиндрических функций второго рода и обозначается $Y_n(x)$. Функция же Неймана обозначается обычно $Y^n(x)$ и определяется равенством

$$Y^n(x) = \frac{\pi}{2} Y_n(x) + (\ln 2 - \gamma) J_n(x),$$

где γ — постоянная Эйлера (Гуссов В. В., цитированное сочинение, 383). Для целочисленного n указанное определение функции $N_n(x)$ сохраняется при помощи «правила раскрытия неопределенности»:

$$N_m(x) = \lim_{n\to m} \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n} J_n(x) - (-1)^m \frac{\partial}{\partial n} J_{-n}(x)\right].$$

Графики функций $J_p(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant 20$, $0 \leqslant p \leqslant 10$ и для $0 \leqslant x \leqslant 14$, $-4 \leqslant p \leqslant 0{,}5$, а также графики функций $N_n(x)$ для $n = 1,2,3,4$ иллюстрируются тремя чертежами.

Из уравнений, приводящихся к уравнению Бесселя, автор рассматривает следующее:

$$t^2u'' + atu' + (b + ct^m)\,u = 0, \qquad (2)$$

где $a, b, c \neq 0$, $m \neq 0$ — постоянные; подстановки $y = t^\alpha u$; $x = \gamma t^\beta$ приводят (2) к уравнению

$$t^2u'' + (2\alpha+1)\,tu' + (\alpha^2 - \beta^2n^2 + \beta^2\gamma^2t^{2\beta})\,u = 0.$$

Это дает возможность получить для уравнения (2) общее решение в виде

$$u = C_1t^{-\alpha}J_n(\gamma t^\beta) + C_2t^{-\alpha}N_n(\gamma t^\beta),$$

где $\alpha = (a-1)/2$, $\beta = m/2$, $\gamma = \sqrt{c}/\beta$, $n = \sqrt{\alpha^2 - b}/\beta$.

Введя операцию $\frac{d^k}{(xdx)^k}$, автор получает в простой форме одно из рекуррентных соотношений для функций J_n:

$$\frac{d^k}{(xdx)^k}(x^{-n}J_n) = (-1)^n x^{-(n+k)}J_{n+k}.$$

Без доказательств приводятся формулы асимптотического поведения цилиндрических функций. Применение цилиндрических функций иллюстрируется, в частности, на примерах нахождения решений частного вида для основного уравнения электродинамики $\nabla^2\Pi^* + k^2\Pi^* = 0$, где Π^* полагается равным $\Pi(r, \theta, \varphi)\,e^{i\omega t}$, и уравнения колебаний мембраны (в левой части формулы (89), представляющей последнее уравнение, вместо $\nabla^2\mu$ должно стоять $\nabla^2 u$). *Н. И. Симонов*

4081. Теоремы об отделении корней ультрасферических многочленов. Кантер (On a separation theorem for the zeros of the ultraspherical polynomials. Kanter L. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 5, 729—733 (англ.)

Пусть $P_n(x;\lambda)$ — ультрасферические многочлены, ортогональные на $[-1, +1]$ с весом $(1-x^2)^{\lambda-1/2}$ и нормированные так, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x;\lambda)\,t^n = (1-2xt+t^2)^{-\lambda}.$$

Доказываются следующие теоремы:

1. Если $R_n(x;\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda} P_n(x,\lambda)$, то положительные (отрицательные) корни $R_n(x;\lambda)$ перемежаются с положительными (отрицательными) корнями $P_n(x;\lambda)$.

2. Справедливо тождество

$$R_n(x;\lambda) = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(x;\lambda)\,T_{n-k}(x)}{n-k},$$

где $T_k(x)$ — многочлены Чебышева.

3. Пусть $c(\lambda)$ — произвольная вещественная функция λ и $V_n(x;\lambda) = R_n(x;\lambda) + c(\lambda)\,P_n(x;\lambda)$. Если $k_\nu(\lambda)$ — коэффициент при x^ν в $P_n(x;\lambda)$, то каждое из условий:

a) $k_n'(\lambda) / k_n(\lambda) + c(\lambda) \leqslant 0$,

b) $k_0'(\lambda) / k_0(\lambda) + c(\lambda) \geqslant 0$, $n \equiv 0 \pmod 2$,

c) $k_1'(\lambda) / k_1(\lambda) + c(\lambda) \geqslant 0$, $n \equiv 1 \pmod 2$

достаточно для вещественности всех корней $V_n(x;\lambda)$.

4. Пусть $\tilde{P}_n(x;\alpha,\beta)$ — многочлены Якоби, ортогональные на $[-1, +1]$ с весом $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ и имеющие старший коэффициент, равный 1. Если $\alpha = \alpha(\lambda)$, $\beta = \beta(\lambda)$, где $\alpha'\beta' \leqslant 0$, $|\alpha'| + |\beta'| > 0$ и $R_{n-1}(x;\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{P}_n(x;\alpha,\beta)$, то все корни $R_{n-1}(x;\lambda)$ лежат в $(-1, +1)$ и перемежаются с корнями $\tilde{P}_n(x;\alpha,\beta)$. *И. П. Натансон*

4082. Теоремы разложения для G-функций. Мейер (Expansion theorems for the G-function. Meijer C. S.), Koninkl. nederl. akad.

wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 4, 349—357; Indagationes math., 1953, **15**, № 4, 349—357 (англ.)

В части V статьи (начало см. РЖМат, 1953, 796—797) рассмотрен случай $m=1$ теоремы, приведенной в части III. Доказана теорема, содержащая различные достаточные условия справедливости формулы

$$\prod_{j=1}^{k}(\gamma_j-\mu)_\mu\lambda^\mu\ {}_{p+k}\Phi_{q+l-1}\left(\begin{matrix}\gamma_1,\ldots,\gamma_k,\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\\ \beta_1,\ldots,\beta_{q-1},\delta_1,\ldots,\delta_l;\lambda\zeta\end{matrix}\right)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\mu-1}(-1)^r\ {}_{k+1}\Phi_l\left(\begin{matrix}-r,\gamma_1-\mu,\ldots,\gamma_k-\mu;\\ \delta_1-\mu,\ldots,\delta_l-\mu;\lambda\end{matrix}\right)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(1+\mu)}{r!}\ {}_{p+1}\Phi_q\left(\begin{matrix}1+\mu,\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\\ \beta_1,\ldots,\beta_{q-1},1+\mu-r;\zeta\end{matrix}\right)+$$

$$+(-1)^\mu\sum_{r=0}^{\infty}{}_{k+1}\Phi_2\left(\begin{matrix}-r-\mu,\gamma_1-\mu,\ldots,\gamma_k-\mu;\\ \delta_1-\mu,\ldots,\delta_l-\mu;\lambda\end{matrix}\right)\times$$

$$\times(-\zeta)^r\prod_{j=1}^{p}(\alpha_j)_r\ {}_{p+1}\Phi_q\left(\begin{matrix}1+r+\mu,\alpha_1+r,\ldots,\alpha_p+r;\\ \beta_1+r,\ldots,\beta_{q-1}+r,1+r;\zeta\end{matrix}\right),$$

где

$$(\alpha)_z=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1).$$

Приложения подобных формул см., например, Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1949, ч. 1, гл. 16.

Л. М. Глускин

4083. Замечание о нулях $(dP^1_{m_i}(x)/dx)|_{x=x_0}$. Зигель, Криспин, Клейнман, Хантер (Note on the zeros of $(dP^1_{m_i}(x)/dx)|_{x=x_0}$. Siegel K. M., Crispin J. W., Kleinman R. E., Hunter H. E.), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 2—3, 193—196 (англ.)

Дается метод определения корней производной присоединенной функции Лежандра 1-го рода 1-го порядка и нецелой степени

$$1)\quad dP^1_{m_i}(x_0)/dx=0,$$

а также оценка интеграла

$$2)\quad\int_{x_0}^{1}[P^1_{m_i}(x)]^2\,dx=0.$$

Авторы полагают $m_i=j+z_j$ или $m_i=j+z_j+1/2$ ($j=0,1,2,\ldots$) и используют разложение выражения (1) в ряд Тейлора по степеням z_j, удерживая при этом члены, содержащие z_j и z_j^2. Из этого квадратного уравнения находят значения z_j. Оценка интеграла 2) производится через значение присоединенной функции $P_{m_i}(x_0)$ и ее производных, которые определяются при помощи разложения в ряд Тейлора по степеням z_j. В статье приведены значения m_i и $\int_{x_0}^{1}[P^1_{m_i}(x)]^2\,dx$, $i=1,\ldots,15$, вычисленные по $j+z_j$-методу и по $j+z_j+1/2$-методу при $x_0=\cos 165°$. Авторы указывают на возможность применения этих методов к другим функциям.

К. Е. Чернин

4084. Общие преобразования двусторонних родственных тригонометрических рядов обычного гипергеометрического типа. Агарвал (General transformations of bilateral cognate trigonometrical series of ordinary hypergeometric type. Agarval R. P.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 4, 544—553 (англ.)

Рассматриваются двусторонние ряды вида

$${}_pX_p\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p;\theta\\ b_1,\ldots,b_p;\lambda\end{matrix}\right]=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(a_1)_n\ldots(a_p)_n}{(b_1)_n\ldots(b_p)_n}\sin(\lambda+2n)\theta,$$

$${}_pX'_p\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p;\theta\\ b_1,\ldots,b_p;\lambda\end{matrix}\right]=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1)_n\ldots(a_p)_n}{(b_1)_n\ldots(b_p)_n}\sin(\lambda+2n)\theta,$$

где $(\alpha)_n=\Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$, и аналогичные ряды косинусов ${}_pZ_p$, ${}_pZ'_p$. Каждый из этих рядов может быть выражен в виде линейной комбинации функций ${}_{p+1}S_p$ и ${}_{p+1}C_p$ или ${}_{p+1}S'_p$ и ${}_{p+1}C'_p$ Сирса (Sears D. B., Proc. London Math. Soc., 1951, 53, 138—157). Используя соотношение Сирса между ${}_{p+1}S_p$ и ${}_{p+1}C_p$, ${}_{p+1}S'_p$ и ${}_{p+1}C'_p$ (см. там же), автор дает ряд соотношений между функциями ${}_pX_p$ и ${}_pZ_p$, ${}_pX'_p$ и ${}_pZ'_p$, а затем выводит эти же соотношения непосредственно с помощью контурных интегралов типа Барнса (Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ч. 2, ГТТИ, Л.—М., 1934, 71).

Л. М. Глускин

4085. Необычные производящие функции для ультрасферических многочленов. Брафман (Unusual generating functions for ultraspherical polynomials. Brafman Fred), Michigan Math. J., 1952, **1**, № 2, 131—138 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Доказана формула

$$\frac{1}{\rho}\cdot\left(\frac{2}{1-t^2+\rho\mu}\right)^\alpha=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n^{(\alpha)}(x)\,n!\,(1+\alpha)_k}{(1+\alpha)_n k!}\,t^n.$$

Здесь

$$k=[n/2],\ (a)_n=a(a+1)\ldots(a+n-1),$$

$$\rho=(1-2xt+t^2)^{1/2},\ \mu=(1+2xt+t^2)^{1/2},$$

$$P_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x^2)^{-\alpha}\ \frac{d^n(1-x^2)^{\alpha+n}}{dx^n}.$$

И. П. Натансон

4086 К. Теория и приложения функций Матьё. Мак-Лахлан Н. В., 474 стр., Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 23 р. 15 к.

Книга состоит из двух частей. Первая часть посвящена теории, вторая — приложениям функций Матьё.

Содержание 19 глав: I. Историческое введение; II. Функции целого порядка; III. Вычисление собственных значений и соответствующих им коэффициентов; IV. Общая теория: функции дробного порядка, решение уравнений; V. Численное решение уравнений; VI. Уравнение Хилла; VII. Непериодические вторые решения, соответствующие функциям ce_m, se_m, Ce_m, Se_m; VIII. Решения в виде рядов функций Бесселя; IX. Волновое уравнение в эллиптических координатах. Теорема об ортогональности; X. Интегральные уравнения и соотношения; XI. Асимптотические формулы; XII. Нули обычных и модифицированных функций Матьё целого порядка; XIII. Решения, выраженные рядами произведений функций Бесселя; XIV. Различные интегралы, содержащие функции Матьё; XV. Применения уравнения $y''+(a-2q\cos 2z)\,y=0$; XVI. Применение волнового уравнения к колеблющимся системам; XVII. Электрическая и термическая диффузия; XVIII. Электромагнитные волноводы; XIX. Дифракция звуковых и электромагнитных волн.

В конце книги даются три приложения: I. Вырожденные формы обычных и модифицированных функций Матьё; II. Собственные значения для функции $ce_m(z, q)$, $m=0-5$, $se_m(z, q)$, $m=1-6$; III. Классификация функций Матьё при a, q действительных и отличных от нуля, а также дополнения и примечания.

Систематического изложения теории функций Матьё книга не содержит. Она написана, как отмечается в авторском предисловии, для инженеров и физиков, интересующихся функциями Матьё с точки зрения их приложений к решению конкретных задач. Большое внимание уделяется методам вычислений функций Матьё, приводится большое число разложений в ряды, первые коэффициенты которых вычисляются. Однако оценок остатков рядов не дается (даже и в тех случаях, когда они весьма просты), и вообще точность вычислений, которые весьма многочисленны, не рассматривается (характерен следующий оборот: «Значения коэффициентов A можно приблизительно проверить с помощью формулы...»—стр. 61). Конец первой части (гл. X—XIV) изобилует списками формул, многие из которых не выводятся. В числе примеров приложений функций Матьё во второй части имеются также примеры, относящиеся к современным техническим проблемам (расчет громкоговорителей, волноводов и т. д.). Не во всех приложениях одинаково подробно рассматривается физическая сторона вопроса, в ряде примеров физическая сущность явления почти не затрагивается.

Перевод не всегда удачен даже в заглавиях пунктов, параграфов и глав (гл. VIII, XIII, XVI, п. 3.40: Решение уравнения $y''+(a-2q\cos 2z)\,y=0$ при q мнимом отрицательном — дословный перевод со столь же неудачного английского выражения и т. п.). Дословные переводы, не соответствующие принятым в математике выражениям, в книге встречаются очень часто, например: «Гипербола, определяющая координату η» (надпись на фиг. 47), причем имеется в виду координатная линия $\eta=\text{const}$, и т. д.

Для математиков книга представляет интерес как справочник, в котором можно найти то или иное разложение или формулу. *В. И. Левин*

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4087. Исследования по математической картографии. Урмаев Н. А., Тр. Центр. н.-и. ин-та геодезии, аэросъемки и картографии, 1953, № 98, 1—107

Пусть часть поверхности шара единичного радиуса посредством функций $x=x(\varphi, \lambda)$, $y=y(\varphi, \lambda)$ отображена на часть плоскости; здесь x, y — прямоугольные координаты на плоскости, а φ, λ — широта и долгота на поверхности шара. Тогда масштаб p площадей и масштаб n по параллелям удовлетворяют соотношению

$$(\partial\varphi / \partial x)^2 + (\partial\varphi / \partial y)^2 = n^2 / p^2. \qquad (1)$$

Предполагая заданными $n / p = g(\varphi)$ или $n/p = g(y)$ или $n / p = g(x^2 + y^2)$, автор, пользуясь известным методом Лагранжа, получает полный интеграл уравнения (1) для функции φ в общем случае и для ряда конкретных видов функции g. Исследования доводятся до численных подсчетов и изображения картографических сеток на чертеже. Указывается связь известных ранее картографических проекций с проводимыми исследованиями. Особо рассматривается случай, когда образы параллелей на плоскости образуют семейство равноотстоящих линий.

Если задано $n / p = g(x, y)$, то решение уравнения (1) можно искать из совместной системы

$$\partial\varphi / \partial x = g / \sqrt{1 + y'^2},\ \partial\varphi / \partial y = gy' / \sqrt{1 + y'^2},$$

где y' означает производную $\partial y / \partial x$ для какого-либо решения уравнения

$$y'' = (\partial g / \partial y - y'\partial g / \partial x)(1 + y'^2) / g, \qquad (2)$$

являющегося уравнением Эйлера для функционала $\int_a^b g(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx$. Рассматриваются случаи понижения порядка уравнения (2), а также методы его численного и графического интегрирования (последнее основано на простом геометрическом смысле этого уравнения).

В главе II предполагается, что $n = p = f(\varphi)$; после введения переменных u, v, τ по формулам $u=\varphi$, $v=\lambda n\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\tau = (\partial x / \partial\lambda) / (\partial y / \partial\lambda)$ получается уравнение $\partial\tau / \partial u - \tau\partial\tau / \partial v = 0$, которое и решается в общем и частных случаях. Наконец, в большой по объему главе III приведены хорошо известные формулы интерполяции, квадратичного приближения, численного дифференцирования, интегрирования и т. д. с расчетом ряда конкретных интересных для математической картографии примеров. В заключение приводится метод численного расчета сопрягающих кривых, необходимых для плавного перехода от одних способов проектирования к другим.

Несмотря на простоту рассматриваемых объектов и их свойств, в работе имеется целый ряд неясных мест. В математическом отношении работа написана небрежно. *А. Д. Мышкис*

4088. Об освещенности изображения отрезка линии с учетом аберрационных функций второго порядка. Кригер (Über die Lichtverteilung im Bild eines Linienstückchens bei Aberrationsfunktionen 2. Grades in den Pupillenvariablen. Krieger Rudolf), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 8/9, 272—273 (нем.)

Рассчитывается освещенность в плоскости изображения самосветящегося предмета в виде небольшого куска линии, которая расположена в сагиттальной или меридиональной плоскости. Оптическая система предполагается центрированной, волновая природа света не учитывается. В статье не приводится результатов, даются лишь указания на метод их получения. Подробное изложение предполагается напечатать в Optica Acta, Paris. В основе метода — необычное представление аберраций центрированной оптической системы, вызывающее сомнение в реальной значимости результатов. Математически задача сводится к исследованию определенного интеграла, пределы которого находятся как точки пересечения двух кривых второго порядка. Если в основу метода положить аберрационные функции третьего порядка, то задача сведется к исследованию эллиптического интеграла.

П. П. Касьянков

См. также: 3955, 3970, 3982—3984, 3987, 3989, 4003, 4033, 4041, 4043, 4045, 4047, 4049, 4060, 4091, 4121, 4171

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

4089. О формуле следов в теории возмущений. Крейн М. Г., Матем. сб., 1953, **33(75)**, № 3, 597—626

И. М. Лифшиц (Успехи матем. наук, 1952, **7**, № 1, 171—180) вывел, без строгого доказательства и без указания границ применимости, формулу для вычисления следа оператора $\Phi(H+T)-\Phi(H)$, где H — гипермаксимальный (самосопряженный) оператор, T — конечномерный симметрический оператор возмущения, $\Phi(\lambda)$ — функция $\lambda(-\infty<\lambda<\infty)$. Эта формула имеет вид

$$\mathrm{Sp}\{\Phi(H+T)-\Phi(H)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(\lambda)\,d\Phi(\lambda), \qquad (1)$$

где $\xi(\lambda)$ — функция, вычисляемая по операторам H и T.

В реферируемой статье дано строгое доказательство формулы (1) для того случая, когда функция $\Phi(\lambda)$ представима в виде

$$\Phi(\lambda)=\int_{\Pi}\frac{1}{\lambda-z}\,d\mu(z) \qquad (-\infty<\lambda<\infty), \quad (2)$$

где Π — множество всех невещественных точек, μ — вполне аддитивная функция на ограниченных борелевских множествах из Π такая, что $\int_{\Pi}|\operatorname{Im} z|^{-k}\,|d\mu(z)|<\infty$ $(k=1, 2)$. При этом возмущающий оператор T может быть произвольным вполне непрерывным симметрическим оператором, имеющим конечный след. Доказывается, что фигурирующая в формуле (1) вещественная функция $\xi(\lambda)$ определяется однозначно, с точностью до ее значений на множестве меры нуль, и имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\xi(\lambda)|\,d\lambda\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\tau_i|<\infty,$$

где τ_i — собственные значения оператора T.

Распространение формулы (1) на класс абсолютно непрерывных функций $\Phi(\lambda)$, имеющих ограниченную вариацию, сталкивается с той трудностью, что оператор $\Phi(H+T)-\Phi(H)$ в этих условиях, вообще говоря, не имеет конечного следа. В этом случае формуле (1) дается некоторое обобщенное толкование, благодаря которому она приобретает смысл для всех $\Phi(\lambda)$ указанного типа.

В. Б. Лидский

4090. О теореме Гельфанда — Мазура. Стоун (On the theorem of Gelfand — Mazur. Stone M. H.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. Math.), 1952, **25**, 238—240 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Известная теорема Гельфанда и Мазура гласит, что если нормированное кольцо R есть тело, то оно изоморфно телу комплексных чисел; обычное ее доказательство основано на применении теоремы Лиувилля к функции $F(\lambda)=f((a-\lambda e)^{-1})$, где $f(x)$ — линейный функционал в R. Аренс (Arens, Bull. Amer. Math. Soc., 1947, **53**, 623—630), также пользуясь теоремой Лиувилля, обобщил эту теорему на тот случай, когда R уже не нормированное, а (необязательно полное) линейное топологическое пространство, обладающее базисом выпуклых поверхностей.

Автор дает другое доказательство теоремы Гельфанда и Мазура, в котором теорема Лиувилля не используется, причем R — полное топологическое пространство, обладающее базисом выпуклых окрестностей. Доказательство основано на рассмотрении предела (при $n\to\infty$) выражения

$$a^n(a^n-r^n)^{-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(r, k/n),$$

где $g(r, t)=a(a-\lambda e)^{-1}$, $\lambda=re^{2\pi it}$

М. А. Наймарк

4091. Вещественные функции на частично упорядоченных множествах. Гинсберг (Real-valued functions on partially ordered sets. Ginsburg Seymour), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 3, 356—359 (англ.)

Рассматриваются частично упорядоченные множества без минимального элемента. Частично упорядоченное множество P называется всюду разветвляющимся, если для любого $p_0\in P$ существуют такие $p_1, p_2\leqslant p_0$, что $\{p\mid p\leqslant p_1\}\cap\{p\mid p\leqslant p_2\}=\Lambda$. Вещественная функция f, заданная на частично упорядоченном множестве P, имеет, по определению, предел L, если для любых $p_0\in P$ и $\varepsilon>0$ существует $p_1\in P$ такой, что $p_1\leqslant p_0$ и $|f(p)-L|<\varepsilon$ при $p\leqslant p_1$.

Основной результат:

Всякое частично упорядоченное множество P погружается с сохранением порядка во всюду разветвляющееся частично упорядоченное можество Q, причем для операции погружения g существует отображение h множества Q на $g(P)$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) $h[g(p)] = g(p)$ для $p \in P$;

2) произвольная вещественная функция f на множестве P имеет предел L тогда и только тогда, когда тот же предел L имеет на Q функция f^*, определяемая для любого $q \in Q$ формулой $f^*(q) = f\{g^{-1}[h(q)]\}$. Эта теорема является обобщением результата Дэя (Day M. M., Duke Math. J., 1944, **11**, 201—229). *Б. З. Вулих*

4092. Об антиметрическом квадратичном пространстве. Гутьеррес-Новоа (On an anti-metric quadratic space. Gutiérrez Novoa Lino), Rev. Soc. cubana cienc. fís. y mat., 1953, **3**, 1—7 (исп.)

Множество S образует антиметрическое пространство, если для некоторых упорядоченных пар его элементов x, y определено вещественное «расстояние» (x, y) такое, что: 1) $(x, y) > 0$; 2) если (x, y) определено, то (y, x) не определено; 3) если (x, y), (y, z) определены, то (x, z) также определено и $(x, y) + (y, z) \geqslant (x, z)$.

Пусть V'—векторное пространство над полем вещественных чисел, $\varphi(v)$ — неопределенная квадратичная форма $v \in V'$, $\varphi(u, v)$ — ассоциированная билинейная форма, а V — подмножество в V', определенное условием $\varphi(v) = 1$. В V определяется расстояние формулой $(u, v) = \operatorname{ch}^{-1}\varphi(u, v) \geqslant 0$. Если $v_1 \in V$, то V_1 обозначает множество векторов v из V, таких, что $\varphi(v_1, v) \geqslant 1$, а V_2 — совокупность векторов, «противоположных» векторам из V_1. Множества V_1, V_2 — метрические пространства, если только из $(u, v) = 0$ следует, что $u = v$. Поскольку соотношение $\varphi(u, v) = 1$ $(u, v \in V)$ есть отношение эквивалентности, то классы эквивалентности $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ суть метрические пространства и преобразование $v \to -v$ есть конгруенция. Так как в случае евклидова n-мерного пространства V', $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ конгруентны гиперболическому $n-1$-мерному пространству, то они в общем случае являются обобщенными гиперболическими пространствами. Ассоциированным с V является пространство $\overline{W}$, порожденное квадратичной формой $\gamma = -\varphi$. Автор показывает, что $\overline{W}$ — антиметрическое пространство. *L. M. Blumenthal*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 1002.

4093. О почти периодических вектор-функциях. Копець (On vector-valued almost periodic functions. Kopeć J.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, **25**, 100—105 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Излагается теория почти периодических вектор-функций, развитая Бохнером (Acta Math., 1933, **61**, 149—184), но применяется иной метод изложения.

Пусть X — комплексное пространство Банаха. Его элемент $x(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ называется вектор-функцией; $x(t)$ называется почти периодической вектор-функцией (п. п. в. ф.), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое относительно плотное множество действительных чисел $\tau = \tau(\varepsilon)$ (почти периодов), что $\|x(t+\tau) - x(t)\| < \varepsilon$ при любом t. П. п. в. ф. $x(t)$ обладает следующими свойствами:

A. Если ξx — линейный функционал в X, то $\xi x(t)$ есть почти периодическая функция Бора.

B. $x(t)$ равномерно непрерывна и ограничена на $(-\infty < t < +\infty)$.

C. Существует среднее значение

$$\mathfrak{M}_t\{x(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt.$$

D. $$\xi\mathfrak{M}_t\{x(t)\} = \mathfrak{M}_t\{\xi x(t)\}.$$

E. Множество $\{\lambda_k\}$ тех действительных значений λ, для которых

$$A(\lambda) = \mathfrak{M}_t\{x(t)\, e^{-i\lambda t}\} \neq 0,$$

конечно или счетно.

Ряд $\sum_{(k)} A(\lambda_k)\, e^{i\lambda_k x}$ называется рядом Фурье для п. п. в. ф. $x(t)$.

F. Две п. п. в. ф., имеющие одинаковые ряды Фурье, тождественны между собой.

G. Для каждой п. п. в. ф. $x(t)$ существует последовательность тригонометрических полиномов $\{x_n(t)\}$, которая сходится равномерно к $x(t)$ на $(-\infty < t < +\infty)$.

Автор останавливается лишь на доказательстве E и G, отмечая их как теоремы. Свойства A, B, C, D он считает достаточно очевидными. Из свойства E получается как прямое следствие свойство F.

Доказательство свойства G базируется на построении множества полиномов Бохнера — Фейера $S_n(x(t); t)$ для функции $x(t)$,— формально точно так же, как и для числовых почти периодических функций. *А. С. Кованько*

4094 РЕЦ. Лекции по функциональному анализу. Рисс, Надь (Leçons d'analyse fonctionelle, Riesz Frédéric, Sz.-Nagy Béla. 448 pp. Académie des Sciences de Hongarie, VIII+1952) [**Рецензия: Реллих** (Rellich), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1953, **56**, № 2/3, ч. 2, 49—50 (нем.)]

См. также: 4009, 4035, 4059, 4121, 4183, 4184

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4095. Об элементарном изложении основных понятий теории вероятностей. Бусленко Н., Военный вестник, 1954, № 2, 64—68

4096. Что такое вероятность? Карнап (What is probability? Carnap Rudolf), Scient. American, 1953, **189**, № 3, 128—130, 132, 134, 136, 138 (англ.)

4097. Замечание к проблеме вероятностей. Штегмюллер (Bemerkungen zum Wahrscheinlichkeitsproblem. Stegmüller Wolfgang),

Studium generale, 1953, **6**, № 10, 563—593 (нем.)

4098. Статистика классов. Адам (Klassenstatistik. Adam Adolf), Mitteilungsblatt Math. Statist., 1953, **5**, 1—28 (нем.)

Излагаются отдельные факты из теории вероятностей, с избытком покрывающиеся, скажем, главами 2, 6 и 14 книги Феллера «Введение в теорию вероятностей и ее приложения». (Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952. *Прим. ред.*). *H. Wold*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 886.

4099. Теоретико-множественное обоснование теории вероятностей. Дуб (The measure-theoretic setting of probability theory. Doob J. L.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 199—209 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

В обзорном порядке обсуждаются вопросы задания вероятностной меры, определения условных распределений вероятностей и построения вероятностной меры в функциональных пространствах. Более подробное изложение можно найти в главе I и § 2 главы II книги того же автора (РЖМат, 1953, 831 К). Автор резко возражает против предложения Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова ввести в аксиоматику теории вероятностей требование совершенности вероятностной меры (Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М.— Л., 1949). Однако он не приводит конкретных доводов в пользу своей точки зрения. *Р. Л. Добрушин*

4100. Преобразования Фурье функций распределения. Дайсон (Fourier transforms of distribution functions. Dyson F. J.), Canad. J. Math., 1953, **5**, № 4, 554—558 (англ.)

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две функции распределения,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}dF_1(x) = f_1(t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}dF_2(x) = f_2(t).$$

Ставится общая задача: можно ли для любого $\varepsilon > 0$ указать такое $\delta > 0$, что из $|f_1(t) - f_2(t)| < \delta$ (для всех t) вытекает

$$|F_1(x) - F_2(x)| < \varepsilon?$$

Автор отмечает, что здесь заключены три различные задачи: 1) если δ может зависеть от ε, F_1 и x, то вопрос ставится о том, вытекает ли из равномерного стремления $f_1(t)$ к $f_2(t)$ стремление $F_2(x)$ к $F_1(x)$ для каждого отдельного x; давно известно, что этот вопрос решается положительно; 2) если δ зависит от ε и F_1, но не зависит от x, то вопрос ставится уже о равномерном стремлении $F_2(x)$ к $F_1(x)$; этот вопрос, как показано в статье, также решается положительно; 3) если δ может зависеть только от ε, но не должно зависеть ни от F_1, ни от x, то вопрос решается отрицательно, как автор показывает построением противоречащего примера.

А. Я. Хинчин

4101. Новая форма закона больших чисел. Ван-Данциг (Anotherform of the weak law of large numbers. Van Dantzig D.), Nieuw arch. wiskunde, 1953, сер. 3, **1**, № 2, 129—145 (англ.)

Рассматривается последовательность серий

$$x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, \ldots, x_{\nu n_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

независимых в каждой серии случайных величин. Дается новый вывод необходимых и достаточных условий применимости закона больших чисел к суммам

$$s_\nu = x_{\nu 1} + x_{\nu 2} + \cdots + x_{\nu n_\nu}$$

в форме: существует последовательность постоянных c_ν такая, что при любом $\varepsilon > 0$

$$P\{|s_\nu - c_\nu| < \varepsilon\} \to 1. \tag{1}$$

Слегка упрощая обозначения, принятые в реферируемой статье, положим

$$s(x) = x^2 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant 1$$

и

$$s(x) = 1 \quad \text{при} \quad |x| > 1.$$

Установив, что $\inf\limits_{-\infty<a<+\infty} Ms(x_{\nu k} - a)$ достигается при некотором $a = \xi_{\nu k}$, автор формулирует необходимое и достаточное условие применимости закона больших чисел к суммам s_ν в виде

$$\lim \sum_\nu = 0, \tag{2}$$

где

$$\sum_\nu = \sum_{k=1}^{n_\nu} Ms(x_{\nu k} - \xi_{\nu k}).$$

Это условие выводится из полезного неравенства (теорема 2)

$$(16\pi)^{-1} \sum_\nu \leqslant \min_a Ms(s_\nu - a) \leqslant \sum_\nu - \sum_\nu \ln \sum_\nu$$

при условии, что

$$6\pi \cdot \min Ms(s_\nu - a) \leqslant 1 \text{ и } \sum_\nu \leqslant 1.$$

Следует отметить, что обсуждаемая здесь постановка вопроса о законе больших чисел рассматривалась раньше в работах А. Н. Колмогорова и Б. В. Гнеденко и то же самое условие (2) имеется в их совместной монографии (Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М. — Л., 1949, 116, Замечание) с тем несущественным различием, что вместо минимизирующих констант $\xi_{\nu k}$ Ван-Данцига берутся медианы $m_{\nu k}$ случайных величин $x_{\nu k}$.

Существенно новым в данной работе является распространение этих результатов на последовательности случайных векторов любого (конечного) числа измерений. В дополнительных замечаниях автор дает топологическую трактовку своих результатов. *А. А. Бобров*

4102. О локальной предельной теореме для однородных цепей Маркова. Маневич Д. В., Докл. АН УзССР, 1953, № 7, 5—9 (русск.; резюме узб.)

Пусть последовательность целочисленных случайных величин ξ_n с конечным числом значений связана в однородную цепь Маркова. Пусть

$s_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, $A_k = Ms_k$, $B_k^2 = Ds_k$. Автор утверждает, что для того, чтобы при $k \to \infty$ равномерно по $-\infty < m < \infty$

$$B_k P\{s_k = m\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(m - A_k)^2 / 2B_k^2\right] \to 0, \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы множество попарных разностей значений величины ξ_1 имело своим наибольшим общим делителем единицу, и пытается доказать это утверждение, используя метод Дёблина.

Основная лемма автора состоит в том, что величина s_v, где v — продолжительность цикла до возвращения в начальное состояние, также имеет единицу наибольшим общим делителем попарных разностей своих значений. Эта лемма опровергается следующим простым примером: Пусть ξ_i принимает три значения 1, 2, 3 и $P\{\xi_{i+1}=2 \mid \xi_i=1\} = P\{\xi_{i+1}=3 \mid \xi_i=2\} = 1$, а $P\{\xi_{i+1}=3 \mid \xi_i=3\} = P\{\xi_{i+1}=1 \mid \xi_i=3\} = 1/2$.

Основная теорема автора также неверна. Из работы А. Н. Колмогорова (Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, **13**, 281), в которой разобран исчерпывающим образом более общий вопрос о многомерной локальной предельной теореме, нетрудно вывести, что для приведенного выше примера соотношение (1) не выполнено. *Р. Л. Добрушин*

4103. Марковские цепи как средство для изучения марковских процессов. Енсен (Markoff chains as an aid in the study of Markoff processes. Jensen Arne), Skand. Aktuarietidskr., 1953, № 1—2, 87—91 (англ.)

Однородный марковский процесс с конечным числом состояний задается матрицей переходных вероятностей $P(t) = e^{At}$, где $A = \{a_{ij}\}$ — матрица плотностей вероятностей перехода. При помощи тождественного преобразования получается

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} A + E\right)^n \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t}. \quad (1)$$

При $\alpha \geqslant \max |a_{ii}|$ матрица $\frac{1}{\alpha} A + E$ является стохастической. Тогда (1) означает, что процесс можно рассматривать как цепь Маркова с матрицей перехода $\frac{1}{\alpha} A + E$, в которой число шагов подчинено распределению Пуассона с параметром αt. Аналогичное сведение к марковской цепи возможно и для некоторых немарковских процессов с конечным числом состояний. Утверждается, что описанное сведение к цепям удешевляет изучение сложных телефонных проблем, так как дает возможность использовать для экспериментального их решения современные счетные машины и позволяет избежать конструирования специальных искусственных моделей. По словам автора, указанный прием дает также более точные результаты при том же числе экспериментов. *А. А. Юшкевич*

4104. Замечание об однородном во времени случайном процессе «рождения». Армитидж (A note on the time-homogeneous birth process. Armitage P.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, **B15**, № 1, 90—91 (англ.)

Рассматривается следующий случайный процесс: вероятность появления некоторого события за время $(T, T + dT)$ равна $\lambda_r dT + o(dT)$, если за время $(0, T)$ появилось r событий. В этом случае известно точное выражение для вероятности $p_x(T)$ появления ровно x событий за промежуток времени $(0, T)$. Изучаются некоторые асимптотические свойства распределения $p_x(T)$ при $T \to 0$.

Б. А. Севастьянов

4105. Статистическая механика общих броуновских движений, лежащих в основании необратимых процессов. Ямамото (Statistical mechanics of general Brownian motions underlying irreversible processes. Yamamoto Tsunenobu), Progr. Theoret. Phys., 1953, **10**, № 1, 11—23 (англ.)

Автор ставит своей задачей молекулярно-теоретическое обоснование уравнений феноменологической теории необратимых процессов. Макроскопическим описанием состояния системы называется совокупность значений небольшого числа «наблюдаемых величин» (observables), каждая из которых является функцией точки фазового пространства системы. Вместо мгновенных значений этих величин иногда предпочтительнее рассматривать их средние значения за небольшой промежуток времени. Совокупность этих значений рассматривается как своего рода фазовое пространство («макрофаза»). Каждый закон распределения в обычном фазовом пространстве (в «микрофазе») индуцирует определенный закон распределения в макрофазе. Исходя из обычных уравнений Фоккера — Планка, описывающих эволюцию данного распределения в микрофазе, автор путем сложных и не всегда достаточно обоснованных преобразований приходит к соответствующим уравнениям, характеризующим эволюцию распределения в макрофазе. Эти уравнения и составляют собою основу феноменологической теории. При выводе делается ряд допущений; реальный смысл некоторых из них, по замечанию автора, в рамках данной статьи остается неясным. *А. Я. Хинчин*

4106 Д. Предельные теоремы для последовательности серий случайных величин, связанных в цепь Маркова. Рашидов Х. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. и механики АН УзССР, Ташкент, 1954

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

4107. Некоторые критерии, основанные на упорядоченных выборках из двух экспоненциальных совокупностей. Эпстейн, Цзао Цзя-гуй (Some tests based on ordered observations from two exponential populations. Epstein Benjamin, Tsao Chia Kuei), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 3, 458—466 (англ.)

Пусть $x_{11} \leqslant x_{12} \leqslant \ldots \leqslant x_{1n_1}$ и $x_{21} \leqslant x_{22} \leqslant \ldots \leqslant x_{2n_2}$ упорядоченные в порядке возрастания результаты двух выборок (S_{n_1} и S_{n_2}) из совокупностей с плотностями распределения $f(x; A_1, \theta_1)$ и $f(x; A_2, \theta_2)$ соответственно, где

$$f(x; A, \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left[-\frac{x - A}{\theta}\right].$$

Пусть S_{r_1} и S_{r_2} — ряды из первых r_1 и r_2 наименьших результатов данных выборок. Рассматриваются критерии, основанные на распределении рядов S_{r_1} и S_{r_2} для проверки гипотез: $\theta_1 = \theta_2$; $\theta_1 = \theta_2$ в предположении $A_1 = A_2$, но их общее значение неизвестно; $\theta_1 = \theta_2$, A_1 и A_2 известны; $A_1 = A_2$; $A_1 = A_2$ в предположении $\theta_1 = \theta_2$, но их общее значение неизвестно; $A_1 = A_2$, θ_1 и θ_2 известны; $A_1 = A_2$ и $\theta_1 = \theta_2$. Приведено несколько очевидных свойств этих критериев, как, например, несмещенность. Вероятностные соотношения для полученных критериев сведены к эквивалентным χ^2- и F-распределениям. Указывается, что полученные результаты могут быть применены при изучении распределения длительности службы тех или иных устройств (например, электронных ламп). *Е. Л. Рвачева*

4108. Критерии, основанные на двойной выборке. Оуэн (A double sample test procedure. Owen Donald B.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 3, 449—457 (англ.)

Рассматривается нормально распределенная случайная величина с известной дисперсией σ^2 и неизвестным средним m. Для различения гипотез H_0: $m = m_0$ и H_1: $m < m_0$ предлагается три сходных критерия, основанных на двух последовательных выборках. Выяснено, что все эти критерии примерно одинаковой мощности, причем в большинстве случаев критерии по двум выборкам несколько лучше критерия по одной выборке. Приведены таблицы для сравнения мощностей, ожидаемого числа наблюдений и параметров, используемых при применении критериев.

Автор упоминает, что для случая неизвестной дисперсии могут быть получены аналогичные критерии. *Е. Л. Рвачева*

4109. Критерии для положительного биномиального распределения в случае, когда оба параметра оцениваются по выборке. Бине (The fitting of the positive binomial distribution when both parameters are estimated from the sample. Binet F. E.), Ann. Eugenics, 1953, 18, ч. 2, 117—119 (англ.)

4110. Случайные числа (Random digits), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 263, 672 (англ.)

Приводится таблица из 250 пятизначных случайных чисел, представляющая часть обширных таблиц «A million of random digits» (будут опубликованы Rand. Corporation, Santa Monica, California).

4111. Некоторое обобщение метода двойной выборки. Сил (On certain extended cases of double sampling. Seal K. C.), Sankhya, 1953, 12, ч. 4, 357—362 (англ.)

4112. Экономичность однократной выборки «по слоям». Далениус (The economics of one-stage stratified sampling. Dalenius Tore), Sankhya, 1953, 12, № 4, 351—356 (англ.)

4113. Формулы для коэффициента надежности, не предполагающие экспериментальной независимости. Гатман (Reliability formulas that do not assume experimental independence. Guttman Louis), Psychometrika, 1953, 18, № 3, 225—239 (англ.)

4114. О выборках из многомерных совокупностей. Далениус (The multi-variate sampling problem. Dalenius T.), Skand. aktuarietidskr., 1953, № 1—2, 92—102 (англ.)

4115. Закон средней в статистической науке (В порядке обсуждения). **Истремский Б.**, Вестн. статистики, 1953, № 6, 46—54

4116. Оценка компонент дисперсии. Гендерсон (Estimation of variance and covariance components. Henderson C. R.), Biometrics, 1953, 9, № 2, 226—252 (англ.)

4117. Об одном методе оценки численности биологической популяции. Крейг (On a method of estimating biological populations in the field. Craig C. C.), Biometrika, 1953, 40, № 1—2, 216—218 (англ.)

Рассматривается совокупность неизвестного числа случайно распределенных объектов. Предполагается, что каждый член популяции имеет равномерное распределение в квадрате O (0, 0); $A(a, 0)$; $B(a, a)$; $C(0, a)$.

Предлагается метод оценки числа членов совокупности, основанный на наблюденных значениях расстояния от наудачу выбранного члена популяции до его ближайшего соседа. *Н. Н. Ченцов*

4118. Модель пространственного распределения галактик. Нейман, Скотт, Шейн (On the spatial distribution of galaxies. A specific model. Neyman J., Scott E. L., Shane C. D.), Astrophys. J., 1953, 117, № 1, 92—133 (англ.)

Подсчеты галактик в $1° \times 1°$-квадратах, проведенные на Ликской обсерватории (Lick Observatory), используются для решения вопроса о том, совместимы ли корреляционные связи, обнаруженные между результатами этих подсчетов, со следующей гипотезой:

(I) Галактики встречаются отдельными скоплениями.

(II) Пространственное распределение центров скоплений почти равномерно или, более точно, подчинено закону Пуассона.

(III) Число ν галактик в скоплении подчинено некоторому закону распределения со средним ν_1 и дисперсией σ_1.

(IV) Расположение галактик относительно центра скопления подчинено симметрическому нормальному распределению со стандартом σ.

Результаты сравнения теоретических и эмпирических данных говорят в пользу указанной выше гипотезы. *Из резюме авторов*

4119 К. Биномиальное, нормальное и пуассоновское распределения. Смит (Binomial, normal and Poisson probabilities. Smith Ed Sinclair, 71 pp. Published by the author, Bel. Air, Md., 1953, 2.50 doll.) (библ.)

Резюме автора. Эта книга содержит 5-значные таблицы биномиального, нормального и пуассоновского распределений. В ней содержатся методы и графики для быстрого определения значений биномиальной функции распределения с точностью до 0,001 при значениях $n > 20$, которые не вошли в помещенные в книге таблицы. Эти приближения используют два члена разложения в ряды Грама — Шарлье типов A и B, величины которых опреде-

ляются при помощи таблиц нормального и пуассоновского распределений. В работе предложена новая трехчленная модификация рядов типа A, которая дает возможность достичь указанной точности с использованием небольшого числа вспомогательных средств. Дается также вводный и иллюстративный материал с многочисленными примерами и ссылками.

Эта работа содержит также таблицы, при помощи которых могут быть получены более точные значения табулируемых вероятностей: 10-значные таблицы $\log n$ и e^{-n} для $n \leqslant 100$; $n!$ и $\log n!$ для $n \leqslant 200$; 5-значные таблицы $\binom{n}{x}$ и $\log \binom{n}{x}$ для $n \leqslant 50$. В книге 71 стр., 10 таблиц и 17 графиков.

H. Chernoff

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 887.

4120 Д. Проверка статистических гипотез о типе распределения по малым выборкам. Петров А. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, М., 1953

ТЕОРИЯ ИГР

4121. Об одной игре над пространством функций. Дансkин, Гилман (A game over function space. Danskin J. M., Gillman L.), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, **4**, № 1—2, 83—94 (англ.)

Рассматривается игра между двумя участниками A и B. Каждый из них избирает «стратегию» (конкретную последовательность действий в ходе игры) соответственно из пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$. Заглавие работы объясняется тем, что в изучаемой игре пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ суть пространства функций.

Игра, о которой идет речь, может быть интерпретирована как поединок между нападающим A и обороняющимся B. Оба участника вооружены автоматами и конечным числом патронов. Через t обозначено расстояние между противниками, убывающее в ходе поединка от $+\infty$ до 0, через $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — вероятности попадания на расстоянии t. Функции ξ и η предполагаются строго убывающими. Стратегия (например, $x = x(t)$) определяется тем, что за время, когда расстояние уменьшится от $t + dt$ до t, A произведет $x(t)\,dt$ выстрелов.

Величина $Q_x(t) = \exp\left[-\int_t^\infty x(\tau)\,\xi(\tau)\,d\tau\right]$ выражает вероятность того, что на пути от $+\infty$ до t B останется непораженным (при условии, что A не был за это время поражен и вел стрельбу при стратегии x). Аналогично определяется $Q_y(t)$. Величина $\pi(x, y) = \int_0^\infty Q_y(t)\,dQ_x(t)$ выражает вероятность поражения B в ходе поединка и называется платежом. Задача A (B) добиться выбором стратегии $x(y)$ максимального (минимального) платежа.

В математической формулировке задачи $x(t)$ и $y(t)$ суть измеримые на $(0, +\infty)$ функции, подчиненные условиям:

$$0 \leqslant x(t),\quad y(t) \leqslant 1,\quad \int_0^\infty x(t)\,dt \leqslant X,\quad \int_0^\infty y(t)\,dt \leqslant Y,$$

так что $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ суть подмножества единичной сферы пространства измеримых ограниченных на $(0, \infty)$ функций. Введением соответствующей топологии и применением одного из вариантов теоремы о неподвижной точке устанавливается наличие «седловой точки», т. е. такой пары стратегий x_0, y_0, что

$$\max_{x\in\mathscr{X}} \min_{y\in\mathscr{Y}} \pi(x, y) = \min_{y\in\mathscr{Y}} \max_{x\in\mathscr{X}} \pi(x, y) = \pi(x_0, y_0).$$

При некоторых дополнительных предположениях находятся явные выражения для $x_0(t)$ и $y_0(t)$.

На стр. 86, 4 строка снизу, напечатано $y's$ вместо $x's$. *М. Г. Гавурин*

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

4122. Теория передачи сигналов и теория информации; применение к линиям связи. Дессулави (Théorie du signal et de l'information et application aux télécommunications. Dessoulavy R.), Bull. Schweiz. elektrotechn. Vereins, 1953, **44**, № 12, 534—543 (франц.)

Обзор теории информации и ее применений к передаче сигналов (см. сб. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953). Содержание обзора становится ясным из перечисления его параграфов: 1. Введение; 2. Сообщение и информация; 3. Определение понятия линии связи и канала; 4. Пропускная способность канала; 5. Фундаментальное соотношение между скоростью передачи информации R и пропускной способностью канала C; 6. Определение понятия коэффициента использования канала (rendement); 7. Коэффициент использования классических систем линий связи. В качестве примера рассматриваются, в частности, системы амплитудной и частотной модуляции; 8. Уменьшение ширины полосы частот. Здесь излагаются работы Дадли (Dudley H., J. Acoust. Soc. Amer., 1939—1940, **11**, 169) и Габора (Gabor D., J. Instn Elektr. Engrs, 1946, ч. III, **93**, 429; 1947, ч. III, **94**, 369); 9. Резюме и заключение. *Я. А. Смородинский*

4123. Введение в теорию связи. Харвуд (Introduction to communication theory. Harwood E. H.), Trans. S. Afric. Inst. Electr. Engrs, 1953, **4**, ч. 8, 241—252 (англ.)

4124. Квазимоментные функции в теории случайных процессов. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 4, 615—618

Плотности $p_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ конечномерных распределений, соответствующих случайному процессу $\xi(t)$, разлагаются в ряды по многомерным полиномам Чебышева — Эрмита. При каждом n коэффициенты этих разложений суть функции $t_1, t_2, \ldots, t_n$; авторы называют их квазимоментными функциями. Приводится ряд формальных соотношений между квазимоментными, моментными и корреляционными функциями процесса $\xi(t)$. Приводится также (линейное) преобразование квазимоментных функций, соответствующее переходу от процесса $\xi(t)$ к процессу $\eta(t) = f(\xi(t))$.

Ю. В. Прохоров

4125. Границы для энтропии. Блакман (Bounds for entropy. Blachman Nelson M.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 10, 1340 (англ.)

4126. Некоторые статистические тождества, относящиеся к кинематике. Клейн (Certain statistical kinematic identities. Klein G.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 321, 217 (англ.)

Рассматривается совокупность N материальных точек, движущихся вдоль прямой; координаты и скорости точек обозначаются соответственно через x_i и u_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Если положить

$$\bar{x} = \sum x_i / N, \quad \bar{u} = \sum u_i / N,$$

$$\mu_{n,m} = \sum (x_i - \bar{x})^n (u_i - \bar{u})^m / N,$$

$$\sigma_n^2 = \mu_{2,0}, \quad \sigma_u^2 = \mu_{0,2}, \quad \mu = \mu_{1,1} = \rho\sigma_x\sigma_u,$$

то будут иметь место равенства:

$$\frac{d\mu_{n,m}}{dt} = n\mu_{n-1,m+1} + m \sum (x_i - \bar{x})^n (u_i - \bar{u})^{m-1} (\dot{u}_i - \dot{\bar{u}}) / N,$$

$$\frac{d\mu_{n,0}}{dt} = n\mu_{n-1,1};$$

в частности,

$$\frac{d\sigma_x^2}{dt} = 2\mu$$

или

$$\dot{\sigma}_x = \rho\sigma_u.$$

Аналогичные тождества получаются и в случае непрерывного распределения массы на прямой с плотностью вероятности $f = f(x, u, t)$. Утверждается, что эти тождества представляют интерес при установлении связи между приближенной (диффузионной) и «точной» (кинетической) теориями броуновского движения и могут иметь еще ряд применений. *А. М. Яглом*

4127 К. Статистические методы контроля качества промышленной продукции (Из цикла лекций «Экономика и организация соц. пром. предприятия». Стенограмма публичной лекции). **Новиков А. С.,** 30 стр. с граф., Всес. об-во по распространению полит. и научн. знаний, сер. 2, № 39, Изд-во «Знание», М., 1953

См. также: 4091

ГЕОМЕТРИЯ

4128. Новое описание поля. Такано (New description of field. Takano Yoshirô), Progr. Theoret. Phys., 1953, **9**, № 1, 86—87 (англ.)

Уравнения некоторых векторных и скалярных полей можно записать при помощи внешних дифференциальных форм Картана, например уравнения электромагнитного поля

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\frac{\pi}{c}\mathbf{I}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

можно представить в виде

$$D\Omega_1 = 0, \tag{1}$$

$$D\Omega_2 = \Omega, \tag{2}$$

где

$$\Omega_1 = B_{(1}[dx^2\, dx^{3)}] + cE_i[dx^i\, dt],$$

$$\Omega_2 = D_{(1}[dx^2\, dx^{3)}] - cH_i[dx^i\, dt],$$

$$\Omega = 4\pi\{\rho[dx^1\, dx^2\, dx^3] - I_{(1}[dx^2\, dx^{3)}\, dt]\}.$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (2), получим $D\Omega = 0$, что равносильно уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{I} = 0.$$

М. В. Васильева

4129. Об обобщенном дифференциале внешней дифференциальной формы. Аруффо (Sul differenziale generalizzato delle forme differenziali esterne. Aruffo Giulio), Atti. Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 1, 13—18 (итал.)

Продолжение работы автора под тем же заглавием (Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1952, **13**, № 6, 367—372).

Пусть для внешней дифференциальной формы ω_r порядка r и класса C_0, заданной в n-мерном единичном кубе C_n, существует форма σ_{r+1}, также класса C_0 такая, что для произвольного ориентированного многообразия D_{r+1} в C_n и его соответственно ориентированной границы dD_{r+1} имеет место

$$\int_{dD_{r+1}} \omega_r = \int_{D_{r+1}} \sigma_{r+1}.$$

Тогда σ_{r+1} называется обобщенным внешним дифференциалом формы ω_r и обозначается $d'\omega_r$.

В предыдущей части работы изучались условия того, чтобы одна из двух данных форм ω_r и σ_{r+1} класса C_0 была обобщенным дифференциалом другой. В реферируемой части работы при помощи этих условий доказывается теорема: для того чтобы $d'[\omega_r dx^{k_1} \ldots dx^{k_p}] = 0$, где ω_r — форма класса C_0, необходимо и достаточно, чтобы $d'\omega_r(X/C) = 0$ для любых $c^{k_1}, \ldots, c^{k_p}$, удовлетворяющих условию $0 < c^{k_l} < 1$. Здесь $\omega_r(X/C)$ — форма, которая получается из ω_r при $x^{k_l} = c^{k_l}$, $dx^{k_l} = 0$, $l = 1, \ldots, p$.

Как следствия получены теоремы:

1. Условие $d'[f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^{k_1} \ldots dx^{k_p}] = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы функция f зависела только от $x^{k_1}, \ldots, x^{k_p}$.

2. Пусть в форме $\omega_r = a_{i_1,\ldots,i_r}[dx^{i_1} \ldots dx^{i_r}]$ коэффициенты $a_{i_1,\ldots,i_r} = 0$ всякий раз, когда хотя бы один из индексов отличен от p фиксированных $k_1, \ldots, k_p$; $l \leqslant k_l \leqslant n$; $l = 1, \ldots, p$; $r \leqslant p < n$. Тогда коэффициенты формы зависят лишь от $x^{k_1}, \ldots, x^{k_p}$.

3. Если коэффициенты $a_{i_1,\ldots,i_r}$ формы ω_r имеют непрерывные производные по любым x^{i_h}, $i_h \neq i_1, \ldots, i_r$, то форма имеет обобщенный дифференциал, который получается из ω_r по обычным правилам внешнего дифференцирования. *А. М. Васильев*

4130. Спирали и овалы. Эрхарт (Spirales et ovales. Ehrhart E.), Rev. math. spéc., 1953, **64**, № 3, 61—62 (франц.)

Спиральной ломаной (с. л.) автор называет ломаную с равными сторонами, у которой все углы тупые, меньше π и возрастают при некотором направлении обхода. Радиус R_p круга C_p, проходящего через три последовательные вершины A_{p-1}, A_p, A_{p+1}, возрастает с увеличением p. Вершина A_{p-2} лежит внутри C_p, вершина A_{p+2} — вне C_p. Длина хорды A_pA_{p+q} выпуклой с. л. возрастает с увеличением p. В многоугольнике, образованном выпуклой с. л. и хордой, соединяющей ее концы, $\sphericalangle A_1 > \sphericalangle A_n$. У выпуклой с. л., у которой сумма углов, прилежащих к замыкающей хорде, меньше π: хорда A_1A_p возрастает с увеличением p (если сторона a достаточно мала сравнительно с длиной с. л.); площадь многоугольника $A_pA_{p+1} \ldots A_{p+q}$ убывает с увеличением p; угол A_pSA_{p+q} возрастает с увеличением p (S — пересечение A_pA_{p+1} и $A_{p+q}A_{p+q-1}$); вершина A_q лежит вне круга C_p, если $q > p+1$, и внутри, если $q < p+1$; вписанный угол $A_1A_pA_n$ возрастает с увеличением p; если угол $A_1A_2A_n$ тупой, стрела с. л. $A_pA_{p+1} \ldots A_{p+q}$ убывает с увеличением p (стрелой называется наибольшее расстояние вершин от хорды A_pA_{p+q}). *Я. П. Бланк*

4131. Заполнение гиперболической плоскости кругами. Фейеш Тот (Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene. Fejes Tóth L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 1—2, 103—110 (нем.)

Если обозначить плотность покрытия евклидовой плоскости одинаковыми непересекающимися кругами буквой d, то, как известно,

$$d \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}906\ldots$$

Автор ставит ту же задачу для гиперболической плоскости и доказывает, что плотность покрытия равна $d \leqslant 3/\pi = 0{,}955\ldots$

Равенство достигается для орициклов, соответствующим образом расположенных на гиперболической плоскости. *С. И. Зетель*

4132. Покрытие гиперболической плоскости кругами. Фейеш Тот (Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene. Fejes Tóth L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 1—2, 111—114 (нем.)

Продолжение статьи автора о заполнении гиперболической плоскости кругами (см. реф. 4131). Выводится неравенство для плотности одинаковых кругов, покрывающих шар, евклидову или гиперболическую плоскость, откуда следует, что эта плотность во всех случаях $\geqslant \sqrt{12}/\pi$. Равенство достигается для покрывающих гиперболическую плоскость орициклов, расположенных в определенном порядке. *С. И. Зетель*

4133. Проблема тринадцати шаров. Шютте, Ван-дер-Варден (Das Problem der dreizehn Kugeln. Schütte K., Van der Waerden B. L.), Math. Ann., 1953, **125**, № 4, 325—334 (нем.)

Вопрос, можно ли приложить 13 шаров одинаковой величины к шару того же радиуса (12 шаров можно поместить в вершинах икосаэдра), служил предметом спора между Ньютоном и Грегори. В работе даются два доказательства невозможности этой задачи, равносильной проблеме размещения на шаре радиуса $r = 1$ тринадцати точек с кратчайшим расстоянием друг от друга, равным единице.

Используются понятия и методы, развитые авторами при нахождении минимального шара, на котором помещаются N точек с кратчайшим расстоянием единица (Schütte K., Van der Waerden, B. L., Math. Ann., 1951, **123**, № 1, 96—124). Вводится понятие «углового избытка» W шара — разности между суммой внутренних углов многоугольников, лежащих на шаре, и суммой углов соответствующего числа правильных треугольников. При $N = 13$ $W = 26\pi - 66\alpha$. Но при всех возможных для $r \leqslant 1$ видах «графика» («график» — фигура на сфере, образованная дугами больших кругов, соединяющих точки, кратчайшее расстояние которых равно единице) угловой избыток оказывается больше указанного. Второе доказательство опирается на свойства суммы углов выпуклого сферического четырехугольника.

Недостаточно строгое доказательство содержится в статье Бурдейка (Boerdijk A. H., Philips Res. Repts, 1952, **7**, 303—313). *А. Г. Школьник*

4134 К. Аналитическая геометрия трех измерений. Мак-Крей (Analytical geometry of three dimensions. McCrea William H., 2d ed., VII+144 pp., Edinburgh and London, Oliver and Boyd, Interscience Publishers, Inc., New York, 1953, 1,25 doll.) (библ.)

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1114.

4135 РЕЦ. Геометрия в пространстве: ясный мыслительный подход. Шнелл, Крофорд (Solid geometry: A clear thinking approach. Schnell Leroy H., Crawford Mildred G., X+198 pp., McGraw-Hill Book Company, New York, 1953, 3.20 doll.) [**Рецензия: Аллен** (Allen Frank B.), School Sci. and Math., 1953, **53**, № 8, 672—673 (англ.)]

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

4136. Железнодорожный колесный скат. Кинематика, геометрия ведущей колеи, направляющая способность. Мюллер (Der Eisenbahnradsatz. Kinematik, Spurführungsgeometrie und Führungsvermögen. Müller C. Th.), Glasers Ann., 1953, **77**, № 9, 264—281 (нем.)

Рассматривается проблема ведения железнодорожного колесного ската по рельсам (проблема ведущей колеи), в частности предупреждения соскальзывания железнодорожного ската с общей точки зрения на основе общих принципов механики и обобщения исследований ряда авторов за последние семьдесят лет. Изложение, по мысли автора, будучи понятным и не специалистам, является в то же время исчерпывающим. Исследование условий соскальзывания колесного ската приводит к трем группам вопросов, отмеченным в заглавии.

В кинематике колесного ската рассматриваются явления движения ската в пространстве, в частности относительные перемещения мгновенных точек касания его колес с рельсами. Движение ската по рельсам на закруглениях характеризуется одновременным качением и скольжением меняющихся точек подъема его колес по рельсам. Исследование кинематики пространственного перемещения конуса, который катится по некоторому основному конусу и вершина которого одновременно совершает вращательное движение вокруг неподвижного в пространстве полюса, позволило определить скорость и направление скольжения в точках подъема ската.

В геометрии ведущей колеи рассматриваются вопросы касания ската и рельсов. Вообще касание происходит по поверхности, но одновременное касание рельса по внешней реборде и рабочей поверхности здесь не изучается, так как исследуется только процесс соскальзывания вследствие поднятия реборды ведущего внешнего колеса; рассматривается касание в одной точке $\mathfrak{A}$.

Эта точка лежит на конической части реборды, ограниченной двумя окружностями с радиусами $r_{\mathfrak{A}_{\min}}$ и $r_{\mathfrak{A}_{\max}}$. Конус имеет вершину на оси колеса и угол 2β в осевом сечении. Если через реборду провести на различной высоте горизонтальные секущие плоскости, то касание рельса и колеса возможно только по одному из этих сечений (конические сечения) и именно там, где угловой коэффициент касательной совпадает с тангенсом угла α колеса с направлением пути.

При помощи простых геометрических зависимостей между радиусом колеса r, высотой боковой поверхности реборды $t_{\max}$ и угла α устанавливается «запас прочности», при соскальзывании — расстояние $\Delta t = t_{\max} - (r + t_{\max})\,(1 - \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta}) - t$.

Наконец, на основании этих результатов исследуется равновесие сил, приложенных к скату на пределе соскальзывания. *В. С. Люкшин*

4137. Переходные кривые с простым законом кривизны. Петер (Uebergangskurven mit einfachem Krümmungsgesetz. Peter H.), Schweiz. Bauzeitung, 1953, **71**, № 32, 457—459 (нем.)

Исследуется вопрос о переходных линиях при проектировании путей сообщения. Такой переходной линией между двумя прямыми можно было бы считать дугу окружности, касающейся этих прямых. Но в этом случае не было бы выполнено требование непрерывного изменения кривизны. Поэтому между прямолинейным путем и дугой окружности должна быть вставлена переходная кривая, которая обеспечивает непрерывное изменение кривизны от 0 до $1/R$, где через R обозначен радиус дуги окружности.

Рассматриваются переходные кривые, имеющие в точке соприкосновения с прямолинейной частью пути точку перегиба, которая принимается за начало координат. Подробно анализируются следующие три случая простого закона изменения кривизны для переходной кривой: 1) кривизна пропорциональна абсциссе $1/\rho = kx$; 2) кривизна пропорциональна радиусу-вектору $1/\rho = kr$; 3) кривизна пропорциональна длине дуги кривой $1/\rho = ks$.

Составив (для каждого случая) соответствующие дифференциальные уравнения и проинтегрировав их, автор получает необходимые формулы. Так, для первого случая решение дано в виде следующего разложения в ряд:

$$y = \frac{kx^3}{6} + \frac{k^3x^7}{122} + \frac{3k^5x^{11}}{2816} + \frac{k^7x^{15}}{10248} + \dots$$

Члены этого ряда представляют ординаты «нечетных» парабол с показателем степени $2n + 3$ ($n = 0,2,4,6,\dots$). Второй случай дает в качестве переходной кривой дугу лемнискаты Бернулли: $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$. Наконец третий случай приводит к уравнению клотоиды. Автор получает формулы для координат точки клотоиды в следующем виде:

$$x = a\sqrt{2}\left[\alpha^{1/2} - \frac{\alpha^{5/2}}{10} + \frac{\alpha^{9/2}}{216} - \frac{\alpha^{13/2}}{9360} + \frac{\alpha^{17/2}}{685440} - \dots\right],$$

$$y = a\sqrt{2}\left[\frac{\alpha^{3/2}}{3} - \frac{\alpha^{7/2}}{42} + \frac{\alpha^{11/2}}{1320} - \frac{\alpha^{15/2}}{75600} + \frac{\alpha^{19/2}}{6894720} - \dots\right].$$

Н. Ф. Четверухин

4138. Связь между характеристиками и касательным преобразованием. Торре (Beziehung zwischen den Charakteristiken und einer Berührungstransformation. Torre C.), Österr. Ingr-Arch., 1953, **7**, № 1, 32—38 (нем.; резюме англ., франц.)

Показано простое применение касательного преобразования огибающей семейства кругов Мора к анализу плоского напряженного состояния; при этом естественным образом получаются направления линий скольжения. Имеется большое количество ссылок, показывающих место данной работы среди результатов других авторов. Заключения автора согласуются с экспериментом.

Опечатка: в формуле (10а) должно быть τ^2 вместо τ_2. *А. Д. Мышкис*

4139. Степенной ряд для луча света в изотропной неоднородной среде. Горн (Series expansions of rays in isotropic, non-homogeneous media. Gorn Saul), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 3, 355—360 (англ.)

Статья возникла из исследования вопросов распространения радиоволн и их возможного применения для измерения расстояний, предпринятого по заданию Ведомства воздушных сил США.

Луч определяется вектором $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, удовлетворяющим дифференциальному уравнению

$$\{n(\mathbf{x}'^2)^{-1/2}\mathbf{x}'\}' = (\mathbf{x}'^2)'^2 \operatorname{grad} n.$$

Здесь $x_i(t)$ — проекции $\mathbf{x}$ на координатные оси, t — время, n — показатель преломления среды, штрих означает дифференцирование по $u = ct$, где c — скорость света в вакууме.

Для вычисления производных высших порядков от $\mathbf{x}$ автор разлагает вектор $\mathbf{x}$ на сумму составляющих по единичным векторам касательной, нормали и бинормали к лучу и пользуется формулами Серре — Френе. Вопрос сходимости получающегося степенного ряда для $\mathbf{x}$ не обсуждается. *П. П. Касьянков*

4140. Диалог о релятивистской системе. Россини (Dialogo sopra il sistema relativistico. Rossini Angelo), Riv. marittima, 1953, 85, № 2, 246—270 (итал.)

Рассмотрев исторические опыты по изучению распространения света, вызвавшие спорные истолкования, завершившиеся появлением теории относительности, автор пытается опровергнуть теорию относительности путем некоторых рассуждений, опирающихся на идеи классической физики и облеченных в подражание Галилею в форму диалога между Симпличчио и релятивистом. Рассуждения его не новы и касаются главным образом истолкования опыта Майкельсона. Нередко путаные соображения сопровождаются грубыми ошибками. Примером может служить приведенное в конце доказательство 5-го постулата Евклида: поскольку сторона равностороннего треугольника, после трех последовательных поворотов вокруг трех вершин на величины внутренних углов, совпадет с начальным положением, имея обратное направление, то отсюда вытекает равенство суммы углов треугольника двум прямым (хотя повороты совершались вокруг различных точек!). Ошибка этого «доказательства», предложенного еще в XIX в. Тибо (Thibaut), анализируется даже в школьном учебнике (Киселев А. П., Геометрия, ч. 2, изд. 14-е, Учпедгиз, 1953, 94). *Б. Л. Лаптев*

4141. Письма к директору. Людовико, Гропелло, Соменци, Цаматтио (Lettere al direttore. Ludovico Mario, Gropello Giovanni di, Somenzi Vittorio, Zammattio Carlo), Riv. marittima, 1953, 85, № 6, 462—469 (итал.)

Эти четыре письма содержат критику статьи Россини (см. реф. 4140).

4142 К. От точки к четвертому измерению. Кольрю (Vom Punkt zur vierten Dimension. Geometrie f. jedermann, Colerus Egmont (58—64 Taus.), 445 S., Zsolnay, 1953, 74), Österr. Bibliogr., 1954, № 1, 10 (библ.)

4143 К. Кинематика. I. Геометрические основы. Гродзинский (Getriebelehre. I. Geometrische Grundlagen. Grodzinski P., 2 Aufl. (Sammlung Göschen, Bd. 1061), 159 S., De Gruyter, Berlin, 1953, 2.40 DM), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 1, 613 (библ.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4144. Теорема Паскаля в пространстве. Корт (Pascal's theorem in space. Court N. A.), Duke Math. J., 1953, 20, № 3, 417—421 (англ.)

Доказываются следующие обобщения теоремы Паскаля на трехмерное пространство:

1. Четыре тройки ребер тетраэдра, сходящихся в его вершинах A_i, пересекаются соответственно четырьмя плоскостями α_i в четырех тройках точек. Для того чтобы эти двенадцать точек принадлежали поверхности второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы четыре прямые a_i, полученные в пересечении плоскостей α_i с гранями тетраэдра, противолежащими соответствующим вершинам A_i, были либо компланарны, либо гиперболоидальны.

2. Три пары противолежащих ребер тетраэдра пересекаются тремя плоскостями в девяти парах точек. Если три пары точек лежат в плоскости (отличной от секущих), то остальные шесть пар точек лежат на поверхности второго порядка и обратно. Справедливы и двойственные теоремы. По поводу первой из этих теорем необходимо отметить, что она уже приводится у Шаля (Chasles M., Aperçu historique sur l'origine et développement des méthodes en géométrie, 2-de éd., Gauthier-Villars, Paris, 1875, Note XXXII,, 400—403). *Я. П. Блапк*

1145 К. Лекции по аналитической и проективной геометрии. Стройк (Lectures on analytic and projective geometry. Struik Dirk J., 219 pp., Addison-Wesley Press, Cambridge, Mass., 1953, 6.50 doll.), Techn. Book Rev. Index, 1953, 19, № 9, 177 (библ.)

4146 РЕЖ. Лекции по проективной геометрии. Годо, Розе (Leçons de géometrie projective. Godeaux Lucien, Rozet Octave, 278 pp., ill., 2 ed., Liège, Sciences et Lettres, 1952, 2.800 fr.) [**Рецензия: Моуфанг** (Moufang R.), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1953, 56, № 2—3, Abt. 2, 44—45 (нем.)]

4147 РЕЖ. Начертательная и кинематическая геометрия для машиностроителей. Крамес (Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer. Krames Josef L., 2 Aufl., 268 S., 2 Taf., ill., Franz Deuticke, Wien, 15 DM) [**Рецензия: Байер** (Baier), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1953, 56, № 2—3, Abt. 2, 48—49 (нем.)]

4148 Д. Построение аксонометрических изображений без использования вторичных проекций. Юдицкий М. М. Автореф. дисс. канд. техн. н., Киевский инж.-строит. ин-т, Харьков, 1954

4149 Д. Некоторые способы решения аксонометрических задач. Халдеев И. М. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. авиац. ин-т, М., 1954

4150 Д. Исследование метрической определенности (обратимости) проекционных изображений и их применения. Прянишникова З. И. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. авиац. ин-т, М., 1954

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4151. О жанре плоской алгебраической кривой, имеющей единственную кратную точку. Росье (Sur le genre des courbes algébriques planes possédant un unique point multiple. Rossier Paul. Séance du 2 juillet 1953, Compte rendu des séances de la Societé de physique et d'histoire naturelle de Genève), Arch. sciences, 1953, 6, № 4, 239—240 (франц.)

Отмечено, что минимальный жанр g неуникурсальной кривой порядка n с единственной кратной точкой порядка k определяется равенством $g = k = n - 2$. *В. В. Морозов*

4152. Замечание о перекрывающихся поверхностях. Найт (A note on overlapped surfaces. Knight A. J.), J. London Math. Soc., 1953, 28, № 3, 383—384 (англ.)

Скотт (Scott D. B., Proc. London Math. Soc., 1950, 51, 308—324) ввел новую числовую характеристику алгебраической поверхности, названную им ее «перекрытием» (overlap), и высказал предположение, что всякая перекрывающаяся поверхность бирационально эквивалентна линейчатой. Показывается, что если алгебраическая поверхность иррегулярности q содержит иррациональную связку кривых жанра q, то она перекрывающаяся, а так как известно, что упомянутый класс поверхностей содержит для каждого q поверхности, отличные от бирационально эквивалентных линейчатым (указан новый прием их построения), то предположение Скотта опровергается. *В. В. Морозов*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

4153. Эвольвента плоской кривой. Цыганков И. В., Уч. зап. Молотовского ун-та, 1953, 8, № 1, 13—14

Изложен один из возможных способов решения известной задачи об определении параметрических уравнений эвольвент по заданным параметрическим уравнениям эволюты. *С. Д. Росинский*

4154. Построение нормальной W-конгруенции. Цыганков И. В., Уч. зап. Молотовского ун-та, 1953, 8, № 1, 25—29

Автор прилагает свой метод (РЖМат, 1954, 3812) к построению нормальной конгруенции W, относя данную фокальную поверхность (S) к геодезическим линиям и их орготональным траекториям. При этом характеристическая функция φ определяется равенством

$$\varphi = \frac{B}{\sqrt{E}}(\sqrt{G})_u, \quad B = \text{const}.$$

Н. И. Алексеев

4155. Конгруенция прямых, ассоциированная с точкой поверхности. Саморуков Б. Н., Уч. зап. Ростовского-на-Дону гос. пед. ин-та, 1953, № 2, 3—8

В каждой точке поверхности S строится касательная плоскость и на ней вводятся координаты при помощи локального репера поверхности. Геометрическое место точек, лежащих в касательных плоскостях поверхности S и имеющих одинаковые координаты, определяет поверхность S^*. Каждой точке M^* касательной плоскости в некоторой точке M_0 соответствует своя поверхность S^*. Нормали к поверхностям S^* в точках M^* образуют конгруенцию, которую автор называет ассоциированной с точкой M_0.

Исследуется частный вид такой конгруенции, когда поверхность S отнесена к линиям кривизны. Ее развертывающиеся поверхности секут касательную плоскость поверхности S по двум пучкам прямых, центры которых совпадают с центрами геодезической кривизны координатных линий; ее фокальная поверхность вырождается в пару прямых, каждая из которых лежит в одной из главных нормальных плоскостей и проходит через соответствующий центр геодезической кривизны. В работе имеются опечатки. *И. В. Цыганков*

4156. О поверхностях, у которых цепи Годо замыкаются и имеют период 8. Боль (Über die Flächen, deren Godeaux-Kette sich schließt und die Periode 8 hat. Bol G.), Arch. Math., 1953, 4, № 1, 61—74 (нем.)

В проективном трехмерном пространстве P_3 рассматривается поверхность $\mathfrak{x}(u, v)$, где u и v— параметры асимптотических линий. $\mathfrak{u} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u)$ и $\mathfrak{v} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v)$ — плюккеровы координаты касательных прямых к асимптотическим линиям поверхности $\mathfrak{x}$ в P_3, которые представляют, как и всегда, 6 однородных координат некоторой точки, принадлежащей гиперквадрике Q пятимерного проективного пространства P_5. Прямые $\mathfrak{u}(u, v)$, $\mathfrak{v}(u, v)$ принадлежат гиперквадрике Q и описывают конгруенцию с фокусами в точках $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$. Последовательность Лапласа, построенная на фокальной сети (u, v) этой конгруенции, называется цепью Годо, если она замыкается.

Доказывается, что поверхности $\mathfrak{x}(u, v)$, допускающие цепи Годо с периодом 8 (поверхности $\mathfrak{x}_8$), существуют с произволом 6 функций одного аргумента. Проективно-минимальные поверхности $\mathfrak{x}_8$ существуют с произволом двух функций одного аргумента.

Если 8 звеньев цепи Годо поверхности $\mathfrak{x}_8$ представлены в P_5 поверхностями $\mathfrak{v}_{-3}$, $\mathfrak{v}_{-2}$, $\mathfrak{v}_{-1}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$, то точки $\mathfrak{u}_3$ и $\mathfrak{v}_{-3}$ являются отображениями в P_5 асимптотических касательных к поверхности, которая называется противоположной к поверхности $\mathfrak{x}_8$ в P_3.

Рассматриваются геометрические свойства минимальных поверхностей, допускающих цепи Годо, основные из которых следующие: 1) диагонали четырехугольника Демулена такой поверхности принадлежат некоторой линейной конгруэнции; 2) каждая проективно-минимальная поверхность $\mathfrak{x}_8$ проективно-эквивалентна своей противоположной поверхности и обратно, если поверхность, допускающая цепь Годо с периодом 8, проективно-эквивалентна своей противоположной поверхности, то она проективно-минимальная. *Т. А. Шульман*

4157. Об индикатрисе поверхности. Туганов Н. Г., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 2, 189—192

Изучаются конгруенции индикатрис поверхности. Индикатриса поверхности в аффинно диф-

ференциальной геометрии строится так, чтобы ее асимптоты совпадали с асимптотическими касательными поверхности. Отнеся поверхность к асимптотическим линиям и аффинной нормали, автор отыскивает огибающие этих индикатрис и составляет уравнение, изображающее те линии поверхности, вдоль которых индикатрисы имеют огибающую. Показывается, что вдоль линии центров величина проективного линейного элемента Фубини равна изменению логарифма параметра индикатрисы и что линии центров в случае постоянства параметра индикатрисы совпадают с линиями Дарбу. Все три семейства линий Сегре одновременно не являются линиями центров поверхности. Только вдоль линии центров индикатрисы в двух смежных точках в пределе лежат на некоторой квадрике. Исследуется вопрос о положении центра квадрики. Доказывается, что проекции по направлению аффинной нормали поверхности центров трех квадрик в точке, соответствующих линиям Дарбу, на касательную плоскость поверхности лежат на одной прямой. Квадрики в точке одного индекса образуют пучок с центром на аффинной нормали. Если дополнительно потребовать, чтобы точке пространства соответствовала бы одна и та же полярная плоскость относительно двух квадрик, то эта же плоскость будет полярной относительно всех трех квадрик одного индекса в точке. Ко всякой произвольно взятой поверхности можно присоединить с произволом пяти функций одного аргумента другую поверхность так, чтобы в возникающем одно-однозначном точечном соответствии между ними сохранялись линии Дарбу. *М. П. Черняев*

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

4158. Эллиптические пространства, изометрично погруженные в евклидовы пространства. Блануша (Les espaces elliptiques plongés isométriquement dans des espaces euclidiens. Blanuša Danilo), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, 8, сер. 2, № 1, 3—23 (франц.; резюме хорват.)

Эллиптическая плоскость отображается изометрично, без особенностей, на следующую поверхность пятимерного евклидова пространства:

$$x_1 = (R/2)\sin^2 u \sin 2v, \quad x_2 = (R/2)\sin^2 u \cos 2v,$$
$$x_3 = (R/2)\sin 2u \sin v, \quad x_4 = (R/2)\sin 2u \cos v,$$
$$x_5 = (\sqrt{3}/2)\, R\,(1/3 + \cos 2u),$$
$$-\pi/2 < u \leqslant \pi/2\,, \quad -\pi/2 < v \leqslant \pi/2.$$

Исключение параметров u, v приводит к уравнениям

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = R^2/3,$$
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_5 - R/\sqrt{3})^2/3,\ x_1 (x_4^2 - x_3^2) = 2x_2 x_3 x_4.$$

Поверхность алгебраическая и лежит на гиперсфере. Все геодезические линии поверхности — окружности радиуса $R/2$. Движениям в эллиптической плоскости соответствуют движения пятимерного евклидова пространства, оставляющие неподвижным центр гиперсферы. Единственными плоскими линиями поверхности служат ее геодезические. Плоскость, проходящая через три точки поверхности, не лежащие на одной геодезической, не имеет других, общих с поверхностью, точек. R_3, проходящее через геодезическую K и точку A поверхности, не имеет других, общих с ней, точек. Если R_3 проходит через четыре точки поверхности, из которых ни одна тройка не лежит на геодезической, то R_3 не имеет других, общих с поверхностью, точек.

R_4, содержащее две геодезические K_1, K_2 поверхности, не имеет других, общих с ней, точек. На поверхности нет кривых, для которых наименьшее число измерений евклидова пространства, содержащего кривую, равно трем. Единственными кривыми на поверхности, для которых наименьшее число измерений евклидова пространства, содержащего кривую, равно четырем, служат образы эллипсов эллиптической плоскости. *Я. П. Бланк*

4159. Изометрическое и не имеющее особенностей вложение n-мерного гиперболического пространства в пространство Гильберта. Блануша (Eine isometrische und singularitätenfreie Einbettung des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes im Hilbertschen Raum. Blanuša Danilo), Monatsh. Math., 1953, 57, № 2, 102—108 (нем.)

Двумерная поверхность гильбертова пространства H, определяемая уравнениями $x_{2k-1} + ix_{2k} = k^{-1/2}(u + iv)^k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, не имеет особенностей и взаимно однозначно изометрически отображается на гиперболическую плоскость (Bieberbach L., Comment. math. helv., 1932, 4, 248—255). Автор доказывает, что этими же свойствами обладает двумерная поверхность H, определяемая формулами $x_0 = R\,\mathrm{arsh}\ u$, $x_{2k-1} = \omega_k^{-1} R\cos(\sqrt{k}\,v)$, $x_{2k} = \omega_k^{-1} R \sin(\sqrt{k}\,v)$; $\omega_k = (1+u^2)^{k/2}\sqrt{k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Эта поверхность не может быть вложена ни в какое конечномерное линейное подпространство H. Высказав предположение, что формулы Бибербаха не могут быть обобщены для многомерного гиперболического пространства, автор приводит формулы:

$$x_0 = R\ \mathrm{arsh}\, u;\ x_{2\,(k-r)\,(n-1)\,+\,(2s-1)} =$$
$$= \omega_k^{-1}(n-1)^{-1/2} R\cos(\sqrt{k(n-1)}\,v_s),$$
$$x_{2\,(k-1)\,(n-1)\,+2s} =$$
$$= \omega_k^{-1}(n-1)^{-1/2} R\sin(\sqrt{k(n-1)}\,v_s)$$
$$(k = 1, 2, \ldots;\ s = 1, 2, \ldots, n-1),$$

определяющие n-мерную поверхность H, изометрически и взаимно однозначно без особенностей отображающуюся на n-мерное гиперболическое пространство. *А. М. Лопшиц*

4160. Об аффинных преобразованиях римановых многообразий. Номидзу (Sur les transformations affines d'une variété riemannienne. Nomizu Katsumi), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 21, 1308—1310 (франц.)

Показывается, что всякая компактная подгруппа группы всех аффинных преобразований $A(V)$ связного дифференцируемого риманова пространства V содержится в группе всех изометрических преобразований $I(V)$ этого пространства.

Если число измерений подпространства T_0 (T_0— наибольшее точечно инвариантное подпространство при преобразованиях группы голономии Ψ_p) касательного пространства T в некоторой точке p пространства V не выше 1, то:

а) всякая компактная подгруппа связной компоненты $A_0(V)$ группы $A(V)$ является подгруппой группы $I(V)$;

б) всякая связная полупростая подгруппа Ли группы $A_0(V)$ является подгруппой связной компоненты $I_0(V)$ группы $I(V)$;

в) производная подгруппа $[A_0(V)\, A_0(V)]$ содержится в группе $I_0(V)$. *И. П. Егоров*

4161. Первая и вторая вариации кратного интеграла в пространстве с кратной ареальной метрикой. Гу Чао-хао, Су Бу-пин (關於多重面積測度空間的體積積分的第一及第二變差。谷超豪，蘇步青), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 2, № 4, 231—245 (кит.; резюме англ.)

В пространстве S_n заданы K-мерная метрика, т. е. интеграл

$$A=\int F\,(x^k, p^i_\alpha)\,[du^1\, du^2 \ldots du^K],$$
$$i=1,\ldots,n,\quad \alpha=1,\ldots,K, \tag{1}$$

распространенный по произвольной K-мерной поверхности

$$x^i = x^i\,(u^\alpha),\quad p^i_\alpha=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \tag{2}$$

и аффинная связность

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{K\,(K+1)}\,\frac{\partial^2 H^i_{\alpha\beta}\,(x,p)}{\partial p^j_\alpha\,\partial p^k_\beta},\quad H^i_{\alpha\beta}=H^i_{\beta\alpha}, \tag{3}$$

зависящая как от точки, так и от K-мерного плоского элемента, взятого за основной в данном локальном пространстве.

Эти два объекта связаны уравнениями

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}=\frac{\partial F}{\partial p^h_\alpha}\,p^j_\alpha\;\Gamma^h_{ij},$$

выражающими инвариантность метрики (1) при параллельном перенесении аффинной связности (3).

Если от поверхности (2) перейти к поверхности

$$\overline{x}^i = x^i + \xi^i\,(x^k, t)\,\delta t,$$
$$\overline{p}^i_\alpha = p^i_\alpha + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} p^j_\alpha\,\delta t,$$

бесконечно близкой к ней и имеющей с ней общий контур, то интеграл (1) получит первую вариацию

$$\delta A=-\int E_i\,\delta x^i\,[du^1\ldots du^K],$$

где

$$\delta x^i=\xi^i\,\delta t,\quad E_i=\frac{\partial^2 F}{\partial p^i_\alpha\,\partial p^j_\beta}\left(\frac{\partial^2 x^h}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}+\Gamma^h_{jk}\;p^j_\alpha p^k_\beta\right).$$

Уравнения $E_i=0$ характеризуют экстремальные поверхности. Для таких поверхностей вычислена вторая вариация интеграла (1):

$$\frac{\delta^2 A}{\delta t^2}=\int\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial p^h_\alpha\,\partial p^l_\beta}\,p^r_\alpha\,\frac{\partial \xi^h}{\partial x^r}\,p^s_\beta\,\frac{\partial \xi^l}{\partial x^s}+\right.$$
$$+\frac{\partial F}{\partial p^h_\alpha}\,p^j_\alpha\,R^h_{\cdot ijk}\,\xi^i\,\xi^k+\frac{\partial F}{\partial p^h_\alpha}\,p^r_\alpha\,\frac{\partial^2 \xi^h}{\partial t\,\partial x^r}+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial p^h_\alpha}\,\frac{\partial \Gamma^h_{jl}}{\partial p^n_\beta}\,\xi^l\left[2p^j_\alpha\,p^s_\beta\,\frac{\partial \xi^n}{\partial x}-\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{\partial^2 x^n}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}+\Gamma^n_{jk}\;p^j_\alpha\;p^k_\beta\right)\xi^j\right]\right\}[du^1\ldots du^K],$$

где

$$R^h_{\cdot ijl}=\frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^l}-\frac{\partial \Gamma^h_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial \Gamma^h_{il}}{\partial p^m_\tau}\,\Gamma^m_{nj}\;p^n_\tau\;-$$
$$-\frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial p^m_\tau}\,\Gamma^m_{nl}\;p^n_\tau+\Gamma^m_{ji}\;\Gamma^h_{ml}-\Gamma^m_{il}\,\Gamma^h_{mj}.$$

М. В. Васильева

4162. Объемная геометрия пространства аффинной связности с ареальной метрикой. Су Бу-цин (有面積測度的遠交聯絡空間的體積幾何學。蘇步青), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 2, № 4, 246—257 (кит.; резюме анг.)

Работа является продолжением статьи Гу Чао-хао и Су Бу-цина (см. реф. 4161).

В пространстве S_N в каждой точке K-мерного многообразия

$$x^i = x^i\,(u^\alpha),\qquad p^i_\alpha=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \tag{1}$$

задан тензор

$$P^i_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}+H^i_{\alpha\beta}\,(x,p),$$

где $H^i_{\alpha\beta}$ — однородные функции от p, симметричные по нижним индексам. Величины

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{K\,(K+1)}\,\frac{\partial^2 H^i_{\alpha\beta}}{\partial p^j_\alpha\,\partial p^k_\beta}$$

определяют аффинную связность в S_N.

Объекты, инвариантные относительно замены параметров $\overline{u}^\alpha=\varphi^\alpha(u)$ с постоянным якобианом $\det\,|\,\partial\overline{u}^\alpha/\partial u^\beta\,|=\text{const}>0$ составляют объемную геометрию.

Из требования инвариантности тензора $P^i_{\alpha\beta}$ при этих преобразованиях следует, что система функций

$$V^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\frac{1}{N-K}\,p^i_\lambda\,\frac{\partial \Gamma^\alpha_{jk}}{\partial p^\alpha_\lambda}$$

также инвариантна и определяет объемную связность (Douglas J., Math. Ann., 1931, 105, 707—733). Если по поверхности (1) задан интеграл

$$A = \int_R F(x, p)\,[du^1 \ldots du^K],$$

где F — однородная функция от p, инвариантная при параллельном перенесении, то вторую вариацию его для экстремальных поверхностей при помощи объемной связности и определяемых ею ковариантных производных:

$$\xi^i_{|j} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + V^i_{hj}\,\xi^h, \qquad \Delta_\alpha\,\xi^i = p^j_\alpha\,\xi^i_{|j},$$

можно записать таким образом:

$$\frac{\delta^2 A}{\delta t^2} = \int_R \left\{ \frac{\partial F}{\partial p^j_\alpha\,\partial p^k_\beta}\,\Delta_\alpha \xi^j\,\Delta_\beta\,\xi^k + \right.$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial p^h_\alpha}\,p^j_\alpha\,B^h_{.ijk}\,\xi^i\,\xi^k +$$

$$\left. + \frac{\partial F}{\partial p^h_\alpha}\,\frac{\partial V^h_{jl}}{\partial p^n_\beta}\,(2p^j_\alpha\,\Delta_\beta\,\xi^n - P^n_{\alpha\beta}\,\xi^j)\right)\xi^j +$$

$$\left. + \frac{\partial F}{\partial p^h_\alpha}\,\Delta_\alpha\left(\frac{\partial \xi^h}{\partial t}\right)\right\} du^1\,du^2 \ldots du^K,$$

где

$$B^h_{.ijk} = \frac{\partial V^h_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial V^h_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial V^h_{ik}}{\partial p^m_\tau}\,V^m_{nj}\,p^n_\tau -$$

$$- \frac{\partial V^h_{ij}}{\partial p^m_\tau}\,V^m_{nk}\,p^n_\tau + V^h_{mk}\,V^m_{ij} - V^h_{mj}V^m_{ik}$$

обозначает тензор объемной кривизны.

М. В. Васильева

4163. Новое уравнение в аффинной теории поля. Бандьопадхьяй (New equation in the affine field laws. Bandyopadhyay G.), Phys. Rev., 1953, сер. 2, **89**, № 5, 1161 (англ.)

В новой аффинной теории поля Шрёдингер (Schrödinger, Proc. Roy. Irish Acad., 1946, **51**, 69) выводит уравнения поля из вариационного принципа, пользуясь детерминантом эйнштейновского тензора

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^\sigma_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\tau}\,\Gamma^\tau_{\rho\nu} - \Gamma^\sigma_{\rho\sigma}\,\Gamma^\rho_{\mu\nu}.$$

Автор предлагает использовать вариационный принцип дважды, привлекая второй раз тензор

$$\overline{R}_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}{}^\sigma}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial \Gamma_{\sigma\nu}{}^\sigma}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\sigma\nu}{}^\rho\,\Gamma_{\mu\rho}{}^\sigma - \Gamma_{\sigma\rho}{}^\sigma\,\Gamma_{\mu\nu}{}^\rho.$$

Автор отмечает, что из его уравнений вытекает невозможность существования изолированного магнитного полюса.

С. П. Фиников

4164. Оптико-механическая аналогия. Румер Ю. Б., Успехи матем. наук, 1953, **8**, № 6, 55—69

Исходя из возможности интерпретировать задачи механики как задачи оптики в пространстве высшей размерности, автор дает физическое истолкование пятой координаты, вводимой при пятимерном обобщении общей теорией относительности. Это открывает ему путь для объединения идей квантовой механики с геометрическими идеями теории относительности. Автор утверждает, что: «1. Пятая координата имеет физический смысл и размерность действия. 2. Условие цилиндричности для метрических потенциалов и условия цикличности для волновых функций заменяются единым требованием микроскопической периодической зависимости всех физических полей (гравитационного, электромагнитного и квантовых ψ-полей) от координаты действия. Период пятой координаты действия имеет универсальную величину постоянной Планка h. 3. Периодическая зависимость всех физических полей в природе от пятой координаты действия проявляется в квантовых явлениях. При переходе к классике $h \to 0$ все физические поля оказываются независимыми от координаты действия, т. е. удовлетворяют условию цилиндричности».

Г. Ф. Лаптев

4165. Об одном обобщении уравнений электродинамики. Калицин (Eine Verallgemeinerung der Gleichungen der Elektrodynamik. Kalitzin Nikola St.), Докл. Болгарской акад. наук, 1951, **4**, № 2—3, 17—20 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.; резюме русск.)

Рассматривается шестимерное евклидово пространство $R_6(x_\alpha)$ с одним мнимым измерением $x_4 = ict$ ($i = \sqrt{-1}$, c — скорость света) и в нем антисимметричный тензор $\varphi_{\alpha\beta}$, подчиненный двум условиям $\varphi_{\alpha\beta,\,\alpha} = 0$ и $a_{\alpha\beta\gamma,\,\alpha} = b_{\beta\gamma}$, где $a_{\alpha\beta\gamma} = \varphi_{(\alpha\beta,\,\gamma)}$

Тогда

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,a_{\alpha\gamma\nu}\,a_{\beta\gamma\nu} - \frac{1}{12}\,\delta_{\alpha\beta}\,a^2{}_{\gamma\nu\eta}$$

определяет тензор энергии, $f_\alpha = kT_{\alpha\beta,\alpha}$ ($k = \text{const}$) — пондеромоторную плотность.

Далее в $R_3 = (x_1, x_2, x_3)$ вектор $\mathbf{H} = (a_{236}, a_{316}, a_{126})$ определяет магнитное поле, $\mathbf{E} = i\,(a_{146}, a_{246}, a_{346})$ — электрическое, $\Gamma = -(a_{156}, a_{256}, a_{356})$ — гравитационное и т. д. Чтобы перейти от R_6 к физическому миру R_4, допускается, что каждое поле не зависит от x_5 и x_6. Таким образом получаются основные уравнения электро-магнито-гравитационного биполя одного электрона.

С. П. Фиников

4166. Некоторые следствия существования тензора g в аффинном релятивистском поле. Бозе (Certaines conséquences de l'existence du tenseur g dans le champ affine relativiste. Bose S. N.), J. phys. et radium, 1953, **14**, № 12, 645—647 (франц.)

Рассматривается четырехмерное пространство аффинной связности, трактуемое в случае симметричности коэффициентов связности ($\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$) как поле теории тяготения, а в случае несимметричности этих коэффициентов — как поле единой

теории поля. В обоих случаях рассматриваются условия интегрируемости системы уравнений

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^k} + g^{\mu\lambda}\,\Gamma^{\nu}_{k\lambda} + g^{\lambda\nu}\,\Gamma^{\mu}_{\lambda k} = 0 \qquad (1)$$

для определения тензора потенциала $g^{\mu\nu}$. В первом случае уравнения (1) являются условиями инвариантности тензора $g^{\mu\nu}$ при параллельном переносе, а во втором случае не являются такими условиями. Показывается, что в первом случае условия (1) приводят к 77 соотношениям между коэффициентами $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu}$ и их первыми производными, а во втором случае — к 225 соотношениям между теми же элементами. *Б. А. Розенфельд*

4167. О группах движений четырехмерного риманова пространства. В р ы н ч а н у (Asupra grupurilor de mişcare ale unui spaţiu Riemannian cu patru dimensiuni. V r ă n c e a n u G.), Studii şi cercetări mat., 1953, **4**, № 1—2, 121—153 (рум.; резюме русск., франц.)

Известно, что максимальный порядок групп движений римановых пространств (собственно римановых или псевдоримановых), отличных от пространств Эйнштейна, равен точно $n(n-1)/2+1$; кроме того, для пространств Эйнштейна непостоянной кривизны наибольший порядок групп движений не выше $n(n-1)/2+2$ (Егоров И. П., Докл. АН СССР, 1949, **66**, № 5, 793—796).

В случае собственно римановых пространств Эйнштейна указанная оценка является точной лишь при $n=4$, при $n>4$ она может быть уменьшена на $n-4$ единицы (Vrănceanu G., Bul. Ştiint. Acad. RP Romîne, 1951, **3**, 451—455). Это позволяет автору формулировать следующий вывод: пространство V_n $(n>4)$ с определенной метрикой непостоянной кривизны может иметь группу движений, имеющую самое большее $n(n-1)/2+1$ параметров, и этот максимум достигается (РЖМат, 1953, 1379).

Показывается также, что стационарные подгруппы $\mathfrak{G}_4$, $\mathfrak{G}_3$ (содержащей вращения, по крайней мере, в одной двумерной плоскости при точечно неподвижной ортогональной к ней плоскости), $\mathfrak{G}_2$ и $\mathfrak{G}_1$ групп движений римановых пространств V_4 $(ds^2>0)$ могут быть определены соответственно следующими операторами $\left(X_{ij}=x^i\frac{\partial f}{\partial x^j}-x^j\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$:

(1) X_{12}, X_{34}, $X_{13}+X_{24}$, $X_{14}-X_{23}$,
(2) X_{12}, X_{13}, X_{23}, (3) X_{12}, X_{34}, (4) $X_{12}+kX_{34}$

При этом единственными пространствами V_4 с группами движений $\mathfrak{G}_8$ являются пространства, приведенные в цитированной выше работе автора. Единственными пространствами V_4 в случае групп движений $\mathfrak{G}_7$, обладающих стационарной подгруппой (2), являются прямые произведения евклидовой прямой и трехмерного пространства постоянной кривизны.

Пространства V_4, допускающие транзитивную группу движений $\mathfrak{G}_6$, являются прямыми произведениями двух пространств постоянной кривизны от переменных x^1, x^2 и x^3, x^4. Транзитивные группы движений $\mathfrak{G}_5$, содержащие (4) неевклидовых пространств V_4, существуют только при $k=0,\pm 2,\pm 1/2$. При этих значениях параметра k найдены все групповые структуры и для каждой из них выписана метрика соответствующего пространства V_4.

Утверждение автора о зависимости найденных пространств V_4, допускающих группу движений $\mathfrak{G}_8$, от одной произвольной постоянной не соответствует действительности.

Фубини дал классификацию пространств V_4 по группам движений (Fubini, Ann. mat. pura ed appl., 1903, (3), **9**, 33—90), из которой следует, что максимальный порядок групп движений пространств V_4 непостоянной кривизны равен 7. Однако в результате незаконного перенесения свойств комплексных групп на вещественные группы полученная классификация является неполной, а частично опиравшаяся на нее теорема о том, что всякая группа $\mathfrak{G}_r$ движений $(r\neq 1, r\leqslant 8)$ пространства V_4 допускает подгруппу $\mathfrak{G}_{r-1}$ порядка $r-1$, оказывается неправильной. Именно, пространство V_4 O-пар (Розенфельд Б. А., Матем. сб., 1949, **66**, № 3, 405—428), перенесенное на случай определенной метрики (и только оно), действительно обладает группой движений $\mathfrak{G}_8$, содержащей группу (1) (в случае $n=2k$ эти пространства допускают группу движений, содержащую k^2+2k параметров). Это пространство V_4 представляет собою, как известно, пространство Фубини $K_2(i)$. *И. П. Егоров*

4168 К. Математический очерк релятивистских теорий тяготения и электромагнетизма. I. Классическая общая теория относительности. Л и х н е р о в и ч (Etude mathématique des théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. I. Relativité générale classique. L i c h n e r o w i c z A.), 149 pp., Paris, 1953 (mimeographed), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 6, 614 (библ.)

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

4169. Теоретико-структурная характеристика геометрий, удовлетворяющих аксиомам соединения. С а с а к и (Lattice theoretic characterization of geometries satisfying «Axiome der Verknüpfung». S a s a k i U s a), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A16**, № 3, 417—423 (англ.)

Пусть R — множество точек, в котором выделены подмножества, называемые прямыми и плоскостями. Подпространством называется такое подмножество S множества R, которое вместе со всякими двумя точками содержит прямую, которой обе эти точки принадлежат, а вместе со всякими тремя неколлинеарными точками — плоскость, содержащую их. Пустое множество также считается подпространством. Наименьшее подпространство, содержащее четыре точки, не лежащие в одной плоскости, называется 3-пространством.

Высказываются следующие аксиомы: 1) две различные точки, принадлежащие прямой, определяют эту прямую; 2) три неколлинеарные точки, принадлежащие плоскости, определяют эту плоскость; 2′) прямая, содержащая две точки, принадлежащие некоторой плоскости, целиком лежит в ней; 3) если p, q, r неколлинеарные точки, то существует одна и только одна прямая ps, параллельная qr; 4) если две плоскости лежат в одном 3-пространстве и имеют общую точку, то они имеют еще хотя бы одну общую точку.

Доказываются следующие теоремы:

1. Структура L изоморфна структуре подпространств множества R с аксиомами 1), 2), 2′), 4) тогда и только тогда, когда L удовлетворяет условиям: а) полнота; б) если $a < b$, то для некоторой точки p справедливо $a < a \cup p \leqslant b$; в) полудедекиндовость; г) для любых точек p, q, r и любого элемента a, где $p \leqslant q \cup a$, $r \leqslant a$, существует такая точка s, что $p \leqslant q \cup r \cup s$, $s \leqslant a$; д) если $\{a_\delta\}$ — направленное множество, то $a_\delta \uparrow a$ влечет за собой $a_\delta \cap b \uparrow a \cap b$ для всякого элемента b.

2. Структура L изоморфна структуре подпространств множества R с аксиомами 1), 2), 3), 4) тогда и только тогда, когда помимо условий а) — д) теоремы 1 выполнено условие: е) если p, q, r — независимые точки, то существует один и только один элемент l такой, что $p < l < p \cup q \cup r$ и $l \cap (q \cup r) = 0$. Условия в) и д) в теореме 2 можно заменить условиями: в′) $(b, c)M$, $b \cap c = 0$ влечет за собой $(c, b)M$; д′) $b \cap c \neq 0$ влечет за собой $(b, c)M$. Символ $(b, c)M$ означает, что (b, c) модулярная пара.

Л. А. Скорняков

4170. Инфинитезимальная геометрия кривых. Винтнер (On the infinitesimal geometry of curves. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 2, 241—259 (англ.)

Кривые $X = X(s)$ в E_3 класса $C^{(2)}$ с неисчезающей кривизной k ($\equiv |X''(s)| \equiv |U_1'|$) и единичным вектором главной нормали U_2 ($\equiv U_1'/k$) класса $C^{(1)}$ имеют непрерывное кручение $\tau = \det(U_1, U_2, U_2')$. Классическое требование для этих кривых класса $C^{(3)}$ уточняется в виде теоремы: Для того, чтобы кривая класса $C^{(2)}$ с неисчезающей кривизной имела класс $C^{(3)}$, необходимо и достаточно выполнение двух независимых условий: 1) вектор U_2 имеет класс $C^{(1)}$; 2) кривизна k имеет класс $C^{(1)}$.

Аналогично доказываются теоремы:

1. Геометрическое место центров соприкасающихся сфер Γ_0 для дуги Γ класса $C^{(4)}$ с неисчезающей кривизной и без сферических точек ($\sigma = \tau k^{-1}$ — $(\tau^{-1} k^{-2} k')' \neq 0$) представляет собой дугу класса $C^{(2)}$, обладающую неисчезающими кривизной и кручением.

2. Эволюта плоской дуги Γ класса $C^{(3)}$ с неисчезающей кривизной и без вершин представляет собой дугу класса $C^{(2)}$.

3. Если на участке поверхности класса $C^{(n)}$ ($n \geqslant 3$) без омбилических точек один из радиусов кривизны вдоль соответствующей линии кривизны не остается постоянным, то построенная для него поверхность центров имеет (локально) класс $C^{(n-1)}$.

4. Чтобы кривая класса $C^{(2)}$ с непрерывным кручением принадлежала единичной сфере, необходимо и достаточно, чтобы она была класса $C^{(3)}$ и ее кривизна k и кручение τ удовлетворяли соотношению $\pm \tau = k'/k^4 - k^2)^{1/2}$, если $k > 1$, $\pm \tau = (k'')^{1/2}$, если $k = 1$.

Обращаясь к вопросу о лежандровом преобразовании плоской кривой, т. е. к переходу от ее точечного задания к тангенциальному, автор формулирует следующее расширение классической теоремы: если функция $y(x)$ имеет в (a, b) строго монотонную производную $y'(x)$ и если через $\eta(\xi)$ обозначить функцию, которая получится после подстановки в функцию $\eta(x) \equiv xy'(x) - y(x)$ вместо x функции $x(\xi)$, являющейся обратной для функции $\xi = y'(x)$, то $\eta(\xi)$ имеет строго монотонную производную в интервале (α, β), соответствующем интервалу (a, b).

А. М. Лопшиц

4171. Пространственная кривая без касательных и кривая без точек. Росье (Une courbe gauche sans tangentes et une courbe sans points. Rossier Paul, Séance du 2 juillet 1953, Compte rendu des séances de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève), Arch. sciences, 1953, **6**, № 4, 238—239 (франц.)

Обобщается на пространство конструкция Коха кривых без касательных. Отрезок в пространстве делится на три равные части и средняя часть отрезка заменяется тремя ребрами построенного на ней правильного тетраэдра. К каждому из пяти звеньев полученной таким образом ломаной применяется это же построение, причем новые отрезки берутся параллельно звеньям первой ломаной. Процесс продолжается неограниченно. Совокупность вершин тетраэдров образует ряд точек, в окрестности каждой из которых лежит бесконечное множество точек этой совокупности. Прямая, соединяющая две точки, при перемещении одной из них в бесконечно малой окрестности другой не стремится ни к какому предельному положению. Точно так же не имеет предельного положения плоскость, проходящая через три бесконечно близкие точки. Построенная кривая, таким образом, не имеет ни касательной, ни соприкасающейся плоскости. Этой кривой, согласно принципу двойственности, будет соответствовать ∞^1 плоскостей, которую можно рассматривать как пространственную кривую без точек. Изложенное переносится на n-мерное пространство.

А. Г. Школьник

4172. Дифференцируемые точки в конформной плоскости. Лейн, Шерк (Differentiable points in the conformal plane. Lane N. D., Scherk Peter), Canad. J. Math., 1953, 5, № 4, 512—518 (англ.)

Дифференцируемые (допускающие дифференцирование) точки дуги кривой A (непрерывный образ замкнутого интервала) на конформной плоскости определяются двумя условиями:

1. Если точки $s \in A$ и $P \neq s$, то для всякой последовательности точек $s' \to s$ ($s' \neq s$; $s' \in A$) существует (касательный) цикл C' (ориентированная окружность) такой, что последовательность циклов $C(s', s, P)$, проходящих через точки s', s, P, сходится: $C(s', s, P) \to C'$.

2. Последовательность касательных (в точке s) циклов $C(\tau, s')$ ($s' \in A$, $s' \neq s, s' \to s$) сходится: $C(\tau, s') \to C(s)$, где $C(s)$—соприкасающийся цикл.

Внутренняя точка s дуги A называется по отношению к циклу C точкой пересечения (носителем). Цикл C в точке s дуги A несет дугу (пересекает ее), если достаточно малая окрестность точки s дуги делится на две односторонние окрестности (правую и левую), расположенные в одной области (в двух различных областях), на которые цикл A делит плоскость.

Если один касательный (некасательный) цикл пересекает дугу A, то все касательные, несопри-

касающиеся (некасательные) циклы пересекают ее. Отсюда классификация дифференцируемых точек дуги по отношению к их соприкасающимся касательным и некасательным циклам.

Р. М. Гейдельман

4173. Максимально-непрерывные кривые. Унгер (Maximalstetige Kurven. Unger G.), Elem. Math., 1953, **8**, № 4, 79—85 (нем.)

Кривая рассматривается как линейно упорядоченное непрерывное множество линейных элементов Pp проективной плоскости (выполнены соотношения порядка и аксиома сечения). Каждая из нижеследующих формулировок употребляется вместе с ей двойственной. Предполагается, что из $Q_iq_i \to Pp$ следует, что $AQ_i \to AP$ для любой фиксированной точки A (отличной от P) и $PQ_i \to p$. Кривая называется регулярной (Штаудт), если для точки A, не лежащей на p (и только для такой точки), лучи, выходящие из A, встречают точки кривой как предшествующие, так и следующие за P.

Автор предлагает необходимое и достаточное условие регулярности, которое он называет максимальной непрерывностью: предельное положение секущей Q_iR_i при $Q_i, R_i \to P$ есть p (паратинжанта (РЖМат, 1953, 879) совпадает с p. *Прим. реф.*). Двойственное требование, входящее в понятие максимальной непрерывности: предельное положение точки пересечения касательных q_i, r_i при $q_i, r_i \to p$ есть P.

И. З. Розенкноп

4174 К. Интегральная геометрия в пространствах постоянной кривизны. Сантало (Geometria integral en espacios de curvatura constante, Santaló Luis A., 68 pp., Serie matemática, vol. I, № 1, Comisión Nacional de la Energia Atómica, Buenos Aires, 1952), Science, 1953, № 3077, 6 (библ.)

4175 Д. Гладкие поверхности с обобщенными вторыми производными. Бакельман И. Я. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1954

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

4176. Краевая задача, связанная с изгибанием полусферы. Ниче (Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. Nitsche Joachim), Arch. Math., 1953, **4**, № 4, 331—336 (нем.)

Полусфера T_0 определена параметрическими уравнениями:

$$\xi = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad \eta = \frac{2y}{1+x^2+y^2},$$

$$\zeta = \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \leqslant 1;$$

S_0 — край T_0. Положим $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда для поверхности T, изометричной поверхности T_0, и для кривизны ρ ее края S выполняются соотношения:

$$\oint_{S_0} \rho\, d\varphi \geqslant 2\pi; \quad \oint_{S_0} \rho \sin\varphi\, d\varphi = 0, \quad \oint_{S_0} \rho\cos\varphi\, d\varphi = 0. \quad (1)$$

Первое из этих соотношений следует из равенства

$$\oint_{S_0} \rho\, d\varphi = 2\iint_{T_0} \frac{1-r^2}{1+r^2} H do,$$

где H—средняя кривизна T. Производная $\mu = d\rho/d\varphi$ удовлетворяет соотношениям:

$$\oint_{S_0} \mu\, d\varphi = 0; \quad \oint_{S_0} \mu \sin\varphi\, d\varphi = 0; \quad \oint_{S_0} \mu\cos\varphi\, d\varphi = 0. \quad (2)$$

Таким образом, (1) и (2) — необходимые условия, которым должна удовлетворять функция ρ в следующей краевой задаче: по заданной кривизне ρ края S определить поверхность T, изометричную полусфере.

Э. Г. Позняк

4177. Однозначная определенность бесконечных выпуклых поверхностей. Погорелов А. В., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 1, 21—23

Доказывается однозначная определенность бесконечных выпуклых поверхностей F с полной кривизной 2π в классе регулярных (трижды непрерывно дифференцируемых поверхностей). Однозначная определенность следует из соотношения

$$\iint_F \begin{vmatrix} \lambda-\lambda' & \mu-\mu' \\ \mu-\mu' & \nu-\nu' \end{vmatrix} (\boldsymbol{ne})\, d\sigma = 0, \quad (1)$$

где λ, μ, ν, и λ', μ', ν' — коэффициенты вторых квадратичных форм изометричных поверхностей F и F', деленные на дискриминант $\sqrt{eg-f^2}$ первой формы; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к F; $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, направленный в отрицательную сторону оси z (положительная часть оси z проходит внутри F и F', начало координат — общая по изометрии точка F и F'); $d\sigma$ — элемент площади F. Действительно, так как $\begin{vmatrix} \lambda-\lambda' & \mu-\mu' \\ \mu-\mu' & \nu-\nu' \end{vmatrix} \leqslant 0$, а $(\boldsymbol{ne}) > 0$, то этот определитель равен нулю, что возможно лишь в случае равенства коэффициентов вторых форм F и F', т. е. конгруентности F и F'. Соотношение (1) следует из оценки интеграла в левой части равенства (1), распространенного на часть F, отсеченную плоскостью $z = h$ с последующим устремлением h к бесконечности.

Э. Г. Позняк

4178. Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны. Ефимов Н. В., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 4, 609—611

Рассматривается поверхность $z = f(x, y)$ отрицательной кривизны $K \leqslant -a^2$, регулярная при всех значениях x, y из области D. Доказывается, что размеры области D не произвольны, именно: существует константа, которой не может превзойти сторона квадрата, если на этот квадрат однозначно проектируется кусок регулярной поверхности с кривизной $\leqslant -1$ (для простоты считается $a^2 = 1$). Теорема дает наиболее существенное обобщение известной теоремы Гильберта о поверхностях постоянной отрицательной кривизны на поверхности $z = f(x, y)$ с ограниченной сверху отрицательной кривизной.

Э. Г. Позняк

4179. О сумме внутренних радиусов при покрытии. Оман (Über die Summe der Inkreisradien bei Überdeckung. Ohmann D.), Math. Ann., 1953, **125**, № 4, 350—354 (нем.)

Доказывается теорема:
Если выпуклая область евклидовой плоскости покрыта конечным числом выпуклых областей, то ее внутренний радиус не превышает суммы внутренних радиусов областей покрытия. Общая задача сводится к случаю, когда единичный круг покрыт треугольниками. На плоскости вводится «масса» с плотностью

$$\mu(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (r < 1);$$

$$\mu(r) = 0 \quad (r \geqslant 1),$$

где r — расстояние от центра круга. Доказательство основано на том, что «масса» треугольника не превышает $2\pi\rho$, где ρ — радиус круга, вписанного в треугольник. *И. З. Розенкноп*

4180. Нежесткие замкнутые поверхности. Кон-Фоссен С., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 1, 63—81

Перевод с немецкого статьи С. Кон-Фоссена от 1929 г. (Math. Ann., 1929, **102**, 10—29).

См. также: 3959, 3975, 4017, 4061

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

4181. Ошибки округления при решении уравнения теплопроводности методом релаксации. Митчелл (Round-off errors in the solution of the heat conduction equation by relaxation methods. Mitchell A. R.), Appl. Scient. Res., 1953, **14**, № 2, 109—119 (англ.)

Уравнение теплопроводности $\partial^2\varphi/\partial x^2 - \partial\varphi/\partial t = f$ с заданными начальным условием при $t = 0$ и граничными условиями при $x = 0$ и $x = L$ решается приближенно при помощи метода сеток. С этой целью прямоугольник LOT, в котором ищется решение, покрывается сеткой с шагами Δx и Δt ($\Delta x = L/(N+1)$, $\Delta t = T/M$). В узлах сетки данное уравнение заменяется устойчивым, при любых соотношениях между Δt и Δx, разностным уравнением

$$\frac{1}{2(\Delta x)^2}[\varphi_{j+1,k-1} - 2\varphi_{j+1,k} + \varphi_{j+1,k+1} + \varphi_{j,k-1} - 2\varphi_{j,k} + \varphi_{j,k+1}] - \frac{1}{\Delta t}[\varphi_{j+1,k} - \varphi_{j,k}] = f.$$

Процесс решения заключается в нахождении функции φ в узлах k-го слоя, если уже найдено решение в узлах $(k-1)$-го слоя ($k = 1, 2, \ldots, M$). При этом на каждом слое решается система N линейных алгебраических уравнений методом релаксации.

Пусть r означает максимум модулей невязок, которыми пренебрегают при решении на каждом слое. Тогда при предположении, что невязки во всех узлах первого слоя (на нулевом слое, т. е. на слое, где заданы начальные значения, и в граничных узлах каждого слоя, в которых заданы краевые условия, погрешности округления ε считаются равными нулю $\varepsilon_{j,0} = \varepsilon_{j,N+1} = \varepsilon_{0,k} = 0$) одинаковые [$r_{1,k} = r$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$], показывается, что наибольшая ошибка в первом слое равна

$$\varepsilon_{1,\frac{N+1}{2}} = -\frac{1}{s}(1-C)\,r,$$

где $s = 2(\Delta x)^2/\Delta t$ и C — постоянная, зависящая только от s и $0 < C < 1$. В предположении, что во всех узлах остальных слоев $r_{i,k} = r$ $(i = 2, \ldots, M;$ $k = 1, \ldots, N)$, дается зависимость максимума модулей погрешностей округления e на M-м слое (при $M \to \infty$)

$$e_{\frac{N+1}{2}} = -\frac{1}{16}(N+1)^2 r.$$

Вычисляется дисперсия $D\varepsilon_{1,\frac{N+1}{2}}$ в предположении, что $r_{1,i}$ — независимые случайные погрешности и $Dr_{1,i} = r^2/3$. Когда число слоев возрастает, погрешность округления в средних узлах либо колеблется с уменьшающейся амплитудой, либо асимптотически стремится к $e_{\frac{N+1}{2}}$. При этом максимум модулей погрешностей округления при любом s всегда достигается на первом или последнем (т. е. M-м) слое; величина же его определяется главным образом N, s и характером распределения невязок на первом слое, в то время как величина M относительно несущественна. Приведены пример ($N = 200$, $s = 0{,}0001$) и графики. Имеется ряд опечаток (например, стр. 111, строка 3 сверху, вместо $r_{j,k}$ должно быть $r_{j+1,k}$, вместо $1 \leqslant j \leqslant M$ должно быть $0 \leqslant j \leqslant M-1$; стр. 117, строка 18 сверху, вместо $\sigma^2_{\frac{N+1}{2}}$ должно быть $\sigma^2_{1,\frac{N+1}{2}}$). *В. К. Саульев*

4182. Обработка методом релаксации особых точек решений уравнения Пуассона. Вудс (The relaxation treatment of singular points in Poisson's equation. Woods L. C.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, **6**, ч. 2, 163—185 (англ.)

Предлагается некоторое видоизменение вычисления невязок при применении релаксационного метода к решению системы линейных уравнений, к которому сводится для квадратной сетки и плоской области решение уравнения Пуассона. Цель видоизменения — учесть наличие на границе области особых точек решения (угловые точки границы, разрывы самого решения или производных). Предполагаемые особенности: $r^m(\alpha\cos m\theta + \beta\sin m\theta)$, $\log r$, θ, где r, θ — полярные координаты с полюсом в особой точке, и производных в точках, близких к особой. Вычисляются невязки также в случае трехмерной области и наличия на границе особой точки типа $1/r$. *Х. Л. Смолицкий*

4183. О сходимости метода Л. В. Канторовича для решения нелинейных функциональных уравнений и его применениях. Мысовских И. П., Вестн. Ленингр. ун-та, 1953, № 11, 25—48

Пусть

$$P(x) = 0 \qquad (1)$$

— общее нелинейное функциональное уравнение, где $P(x)$ — дважды дифференцируемая в смысле Фреше нелинейная операция, переводящая элементы некоторого нормированного пространства X типа Банаха в элементы другого пространства Y того же типа. Строятся последовательные приближения к решению по формуле

$$x_{k+1} = x_k - [P'(x_k)]^{-1} P(x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots) \qquad (2)$$

или

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - [P'(x_0)]^{-1} P(\bar{x}_k) \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

в случае модифицированного процесса. Дается прямое доказательство теоремы о сходимости модифицированного процесса. Исследуется случай, когда производный оператор $P'(x)$ от левой части уравнения (1) имеет обратный равномерно ограниченный по норме в некоторой сфере.

Сходимость, а также существование решения дает теорема 1.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) для линейной операции $P'(x)$ существует обратная $\Gamma_x = [P'(x)]^{-1}$ в каждой точке сферы

$$\| x - x_0 \| \leqslant H(h)\,\eta = \eta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{2^k - 1}, \quad 0 < h < 2, \qquad (3)$$

причем для всех точек этой сферы выполнено неравенство $\| \Gamma_x \| \leqslant B$;

2) для x_0 имеет место неравенство $\| \Gamma_{x_0} P(x_0) \| \leqslant \eta$;

3) в сфере (3) выполнено неравенство $\| P''(x) \| \leqslant K$;

4) постоянные B, K, η подчинены условию $h = BK\eta < 2$.

Тогда в сфере (3) уравнение (1) имеет решение x^*, к которому сходятся последовательные приближения (2), при этом оценка ошибки дается неравенством $\| x_n - x^* \| \leqslant H(h)\,\eta \left(\frac{h}{2}\right)^{2^n - 1}$.

Область единственности определяет теорема 2.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, причем условие 4) выполнено в усиленном виде $h = BK\eta < \alpha$ (α—корень уравнения $zH(z) = 2$), то решение x^* уравнения (1) единственно в сфере

$$\| x - x_0 \| < \frac{2}{h}\,\eta = \frac{2}{BK}.$$

Таким образом, существование решения и сходимость метода обеспечиваются неравенством $h < 2$, в то время как в работе Л. В. Канторовича (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 6, 89—185) требуется выполнение неравенства $h \leqslant \frac{1}{2}$.

Дается применение к системе n алгебраических уравнений с n неизвестными

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

В качестве пространства X берется конечномерное пространство m_n элементов $x(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\| x \| = \max_i \{ | \xi_i | \}$.

Устанавливаются достаточные условия существования первой и второй производной от интегрального оператора

$$H(x) = \int_0^1 K(s, t)\, f(t, x(t))\, dt.$$

Рассматривается также граничная задача для уравнения

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = e^U.$$

М. А. Мертвецова

4184. О влиянии погрешности на сходимость процесса Ньютона для нелинейных функциональных операций. Борисович Ю. Г., Уч. зап. Казанского ун-та, 1953, **113**, № 10, 189—192

Рассматривается видоизмененный процесс Ньютона для общих нелинейных функциональных уравнений вида

$$P(x) = 0, \qquad (1)$$

где $P(x)$ — нелинейная операция из X в Y (X и Y— два полных линейных нормированных пространства).

Последовательность приближений определяется по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_0 P(x_n), \quad \text{где } \Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}.$$

На каждом шаге процесса операция Γ_0 заменяется приближенно линейной операцией

$$\bar{\Gamma}_n = \Gamma_0 + A_{n+1}, \text{ где } A_{n+1} = \bar{\Gamma}_n - \Gamma_0.$$

Погрешность при вычислении $(n+1)$-го приближения характеризуется величиной $\| A_{n+1} P(x_n) \|$. Доказывается сходимость видоизмененного таким образом процесса к решению уравнения (1), причем быстрота сходимости определяется неравенством

$$\| x_n' - x^* \| \leqslant q^{n-1} \{ \| x_1' - x^* \| + 2 \| A_1 P(x_0) \| \},$$

где

$$q = 1 - \sqrt{1 - 2h_0} < 1 \quad \left(h_0 < \frac{1}{2},\ x_{n+1}' = x_n' - \bar{\Gamma}_n P(x_n) \right).$$

М. А. Мертвецова

4185. Численное интегрирование уравнения электронных траекторий. Лоде (Intégrations numériques de l'équation des trajectoires électroniques. Laudet Michel), J. phys. et radium, 1953, **14**, № 11, 604—610 (франц.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dz}\left(S \frac{du}{dz}\right) + \frac{1}{4S} \{ (1 + 2\alpha\Phi)\,\Phi'' + \gamma^2 B^2 \}\, u = 0, \qquad (1)$$

где

$$S = \Phi^{1/2} (1 + \alpha\Phi)^{1/2}, \quad \alpha = \frac{|q|}{2m_0 c^2}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{|q|}{2m_0}},$$

$$u = X + iY,$$

X, Y — координаты относительно осей, вращающихся по закону

$$\frac{d\psi}{dz} = \pm\frac{1}{2}\gamma BS^{-1},$$

Φ — потенциал на оси, а B — магнитная модуляция. Подстановкой $u = US^{1/2}$ уравнение (1) приводится к системе

$$\frac{dU}{dz} = U', \quad \frac{dU'}{dz} = QU, \qquad (2)$$

где

$$Q = -\frac{1}{16}\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2 3 + \frac{4\alpha\Phi + 4\alpha^2\Phi^2}{(1+\alpha\Phi)^2} - \frac{\gamma^2 B}{4S}.$$

Применение к системе (2) метода последовательных приближений приводит к формуле вида

$$\left\|\begin{matrix} U \\ U' \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} U_A \\ U'_A \end{matrix}\right\|,$$

позволяющей вычислить значения U, U' при $z = z_A + h$ по их значениям при $z = z_A$. При этом для a, b, c, d получаются выражения в виде рядов по степеням h. Отсюда автор для случая интервалов одинаковой длины выводит формулу Дюрана (Durand E., Le calcul numérique des trajectoires electroniques. 78^{e}Gongrès National des Sociétés Savantes, avril, 1953): $U_{i+1} = K_i U_i - L_i U_{i-1}$ и показывает, что с точностью до членов порядка h^4 включительно этой формуле можно придать вид

$$\left(1 - \frac{h^2}{12}Q_{i+1}\right)U_{i+1} = \left(2 + 10\frac{h^2}{12}Q_i\right)U_i - \left(1 - \frac{h^2}{12}\right)U_{i-1}.$$

Для случая неравных интервалов $z_{i+1} - z_i = h$, $z_i - z_{i-1} = k$ получается следующее обобщение этих формул:

$$K_i = \left(1 + \frac{h}{k}\right) \times$$

$$\times \left\{1 + \frac{Q_i}{6}h(h+2k) + \frac{Q'_i}{12}[(h+k)^2(h-k) + k^3] + \ldots\right\},$$

$$L_i = \frac{h}{k}\left\{1 + \frac{Q_i}{6}(h^2 - k^2) + \frac{Q'_i}{12}(h^3 + k^3) + \ldots\right\},$$

справедливое с точностью до членов порядка h^3 включительно. Эти формулы, а также их следствия вида

$$\left\|\begin{matrix} U_{i+1} \\ \Delta_{i+1,i} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} H_i & L_i \\ H_{i-1} & L_i \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} U_i \\ \Delta_{i,i+1} \end{matrix}\right\|, \quad \Delta_{i+1,i} = U_{i+1} - U_i,$$

$$H_i = K_i - L_i$$

применяются к определению конкретных траекторий, причем на этих примерах выясняется влияние отдельных членов в формулах для K_i и L_i на точность полученных результатов. *М. А. Наймарк*

4186. О приближенном интегрировании линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Моисеев Н. Н., Уч. зап. Ростовского-на-Дону ун-та; 1953, **18**, № 3, 83—98

Рассматриваются главным образом уравнения вида $y'' + \varphi(t)\,y = f(t)$ в предположении, что $\varphi(t)$ допускает представление в виде $\varphi(t) = \varkappa(t) + \xi(t)$, где $\max|\xi(t)| \ll \max|\varphi(t)|$ и интегралы порождающего уравнения

$$y'' + \varkappa(t)\,y = 0 \qquad (1)$$

известны.

Приближенное решение ищется в виде $y = A(t)u + B(t)v$, где u и v — линейно независимые интегралы (1), а $A(t)$ и $B(t)$ определяются из системы дифференциальных уравнений, которую автор получает методом осреднения.

Эти соображения положены в основу численного интегрирования однородного уравнения

$$y'' + \varphi(t)\,y = 0, \qquad (2)$$

причем интервал интегрирования разбивается на n промежутков одинаковой длины и $\varphi(t)$ аппроксимируется либо полигональной кривой, либо какой-нибудь другой, например, $\varkappa(t) = (a^{2/\nu}t + b)^{\nu}$, $\nu \neq 1$. Тогда интегрирование (2) сводится к последовательному интегрированию соответствующих уравнений на каждом промежутке.

Автор обосновывает применение указанных методов численного интегрирования теоремой, справедливой при некоторых условиях, которым должны удовлетворять аппроксимирующие функции, чтобы обеспечить близость решений.

В случае неоднородного уравнения, как отмечает автор, во многих задачах теории колебаний можно воспользоваться для вычисления частного интеграла также асимптотическими разложениями, причем указывается на возможность использования конечных отрезков этих разложений. Доказательство соотвстствующей теоремы отличается от известных доказательств (Тамаркин Я. Д., О некоторых общих задачах теории линейных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917 г; Пугачев В. С., Прикл. матем. и механика, 1942, **6**, 203—208).

В реферируемой работе имеются опечатки (например, стр. 85, строка 9 сверху, вместо $+ a^2x^{\nu}y$ должно быть $+ a^2x^{\nu}y$). *Д. Ф. Давиденко*

4187. Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля. Дородницын (Asymptotic solution of Van der Pol's equation. Dorodnicyn A. A.), Amer. Math. Soc. Translation № 88, 1953, 24 (англ.)

Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля. Дородницын (Asymptotic solution of Van der Pol's equation. Dorodnicyn [Dorodnitsyn] A. A., translated by C. D. Benster, 32 pp., U. S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Los Angeles, Calif., NBS Rep. 2489, 1953)

Переведено из Прикл. матем. и механики, 1947, **11**, 313—328.

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 32.

4188. Замечания о численном решении краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом итераций Пикара. Фельберг Е., Механика; Сб. перев. и обз. иностр. периодич. лит-ры, 1953, № 1, 91—97 Перевод статьи Е. Фельберга (E. Fehlberg) из Z. angew. Math. und Mech., 1952, **32**, 23—26.

Рассматривается дифференциальное уравнение 2-го порядка $y'' = \varphi(x, y, y')$

при граничных условиях $y(-1)=y_1$, $y(1)=y_2$. Здесь φ — некоторая функция, обеспечивающая единственность решения. Правая часть заменяется приближенным решением, т. е. получается $\varphi(x, y, y')=f(x)$, после чего $f(x)$ разлагается в ряд по полиномам Лежандра. Даются формулы для коэффициентов разложения второй итерации y по полиномам Лежандра в зависимости от коэффициентов разложения $f(x)$. При необходимости можно перейти к следующим итерациям. Для разложения по полиномам Лежандра первой итерации, где не требуется высокая точность, предлагается упрощенный метод, заключающийся в том, что $f(x)$ заменяется многочленом 4-го порядка, совпадающим с $f(x)$ в некоторых точках, и первая итерация также ищется в виде многочлена 4-го порядка. Это существенно упрощает вычисления, однако для последующих итераций упрощенный метод оказывается недостаточно точным. *Г. И. Баренблатт*

4189. Погрешности в вычислениях динамической отдачи, обусловленные конечными приращениями пространства и времени. Леви, Кролл (Errors introduced by finite space and time increments in dynamic response computation. Levy Samuel, Kroll Wilhelmina D.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, **51**, № 1, 57—68 (англ.)

Изучается конечноразностным методом изменение во времени изгибающего момента в середине стержня постоянной жесткости, подверженного действию поперечной мгновенно приложенной силы. Стержень заменяется некоторым количеством упруго связанных дискретных масс, и разностное уравнение для приближенного численного интегрирования конструируется с помощью формулы

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_n=\frac{1}{(\Delta t)^2}(2x_n-5x_{n-1}+4x_{n-2}-x_{n-3}),$$

где Δt — приращение времени, n — число ступеней, а x_n — смещение при $t=n\Delta t$.

На основе нескольких вычисленных до конца примеров утверждается, что разностный метод исследования изгибающего момента приводит к удовлетворительному результату. *Ш. Е. Микеладзе*

4190. Сходимость численной итерации. Антосевич, Хаммерсли (The convergence of numerical iteration. Antosiewicz H. A., Hammersley J. M.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 604—607 (англ.)

Указывается, что итерационный процесс $x_n=f(x_{n-1})$ с начальным значением x_0 может сходиться к корню уравнения $x=f(x)$ и в тех случаях, когда

1) $|f'(x)|\geqslant k>1$ в достаточно малой окрестности корня и x_0 принадлежит этой окрестности (пример: $f(x)=2x$ при $|x|\leqslant 1$, $f(x)=0$ при $|x|>1$);

2) функция $f(x)$ не дифференцируема в окрестности корня; достаточно, например, чтобы она удовлетворяла условию Липшица порядка 1 ($|f(x_{n-1})|\leqslant k|x_{n-1}|$, где $k<1$; предполагается, что корень равен нулю);

3) $f(x)$ разрывна в любой окрестности корня;

4) если две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в окрестности корня удовлетворяют условиям $|f_i'(x)|\leqslant k_i<1$ ($i=1, 2$), причем k_i — наименьшие из возможных чисел, удовлетворяющих этим условиям, и если $k_1<k_2$, то отсюда еще не следует, что процесс итерации сходится для первой функции быстрее, чем для второй.

Однако все эти результаты, как признают и сами авторы, носят чисто теоретический характер. Метод доказательства (приведение уравнения к такому виду, чтобы корнем его был нуль) не дает возможности решить для заданного уравнения вопрос о том, имеют ли место указанные исключительные случаи. *М. С. Горнштейн*

4191. Замечание о сходимости итерационных процессов для решения систем линейных уравнений. Шрёдер (Eine Bemerkung zur Konvergenz der Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme. Schröder Johann), Arch. Math., 1953, **4**, № 4, 322—326 (нем.)

Рассматривается система уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k+r_i=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (1)$$

Для решения этой системы могут быть применены способ простых итераций и метод Зейделя.

Доказывается, что для систем с определителем, не равным нулю, из сходимости обычных итераций следует сходимость зейделевских, если имеет место один из двух случаев:

$$1)\ a_{ik}=\bar{a}_{ki};\quad a_{ii}<0,$$

$$2)\ a_{ik}\geqslant 0 \text{ при } i\neq k,\ a_{ii}<0,$$

и система (1) не распадается на несколько несвязанных систем.

В общем же случае сходимость простых итераций не влечет сходимость зейделевских. Автор ссылается при формулировке последнего факта на работу Коллатца (Collatz L., Math. Z., 1950, **53**, 149—161). Между тем этот результат значительно ранее был получен В. К. Ивановым (Изв. АН СССР, сер. матем., 1939, № 4, 477—486). *Ю. А. Шрейдер*

4192. Группа формул для численного интегрирования. Амбле (A set of formulas for numerical integration. Amble Ole), Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1952, **25**, 38—41 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Даются формулы для вычисления интеграла от функции, которая известна в равноотстоящих точках внутри промежутка интегрирования и соседних с ним точках. Для получения формулы низшего порядка через четыре последовательные точки проводится парабола и получается выражение для интеграла между двумя средними точками. При помощи суммирования таких выражений показывается, что

$$\int_0^{nh}y\,dx=\frac{h}{24}(-y_{-1}+12y_0+25y_1+24y_2+24y_3+\ldots+$$
$$+24y_{n-2}+25y_{n-1}+12y_n-y_{n+1}).$$

Аналогичные формулы даны для аппроксимирующих кривых более высокой степени. На примере

автор показывает, что формула Симпсона лучше, чем приведенная формула, и хуже, чем формула ближайшей высшей степени. *S. Levy*

Перевод из Math. Rev., 1952, **14**, № 9, 907.

4193. Представление эмпирической функции посредством полинома. Беренс (The representation of an empirical function by means of a polynomial. Behrens D. J.), Atomic Energy Res. Establ. Rept № 580, 1950, 23 pp. (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть $f(x_j) = f_j$ $(x = j;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ обозначают полученные экспериментальным путем значения функции, которые предполагаются равноточными (т. е. равные по абсолютной величине случайные ошибки одинаково вероятны для всех рассматриваемых f_j), так что приближение $f(x)$ на множестве $x = 1, 2, \ldots, n$ посредством полинома $p_r(x)$ степени r по способу наименьших квадратов может осуществляться без весовых коэффициентов. В дальнейшем $p_r(x) \equiv p_r[f; x]$ $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$ будет обозначать именно тот полином степени r, для которого сумма

$$\sum_{j=1}^{n} \{p_r(j) - f_j\}^2 = \min = \beta_r.$$

Кроме того, при $r = -1$ следует считать $p_{-1}(x) \equiv 0$. Полагая далее $\Delta^\nu f(j) = \Delta_j^\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, $f_j = \Delta_j^0$, $C_s^t = \binom{s}{t}$, автор еще вводит в рассмотрение, при $r = 0, 1, \ldots, n-1$, величину

$$m_r(f) = \sum_{j=1}^{n-r} \binom{n-j}{r} \binom{r+j-1}{r} \Delta_j^r \Big/ \binom{n+r}{2r+1} \qquad (1)$$

— взвешенное среднее арифметическое величин Δ_j^r $(j = 1, 2, \ldots, n-r)$.

Математическим ядром работы является установление следующих двух основных соотношений:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(I)}\ m_r(f) = \Delta^r p_r(x) \equiv \Delta^r p_r[f; x] \\ &\text{(II)}\ \beta_{r-1}(f) - \beta_r(f) = \\ &= \binom{n+r}{2r+1} [m_r(f)]^2 \Big/ \binom{2r}{r} \end{aligned}\right\} (r = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Соотношение (II) дает возможность определить заранее все величины $\beta_r(f)$ $(r = n-2, n-3, \ldots, 1, 0)$, зная наперед $\beta_{n-1}(f) = 0$ и $\beta_{-1}(f) = \sum_{j=1}^{n} f_j^2$, в то время как (I) позволяет также наперед определить старший коэффициент полинома $p_r(x)$ $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Практическую целенаправленность своей работы автор полагает, главным образом, в изыскании способов прямого определения наивыгоднейшего значения r без предварительного вычисления самих $p_r(x)$.

В согласии с известным гауссовским положением автор считает, что при надлежащем выборе значения r (если только точные значения величины $f(x)$ в действительности хорошо представимы посредством полинома низкой степени) величина

$$\frac{\beta_r}{n-(r+1)} = \frac{\beta_r}{n-r-1} \qquad (2)$$

должна быть близка к величине $\delta^2 f$ среднего квадрата ошибки экспериментального определения значений f_j. На основе некоторых дополнительных соображений автор считает заслуживающими внимания лишь те из значений $r = -1, 0, 1, 2, \ldots$, для которых имеет место неравенство

$$\frac{\beta_r}{n-r-1} \leqslant \frac{\beta_{r+1}}{n-r-2},$$

дополняя этот критерий указываемыми ниже графическими соображениями.

Если величина (2) убывает все время вплоть до $r = n-2$, это должно свидетельствовать о том, что $f(x)$ не допускает хорошего представления при помощи полинома низкой степени. С другой стороны, когда величина $\delta^2 f$ заранее известна по условиям опыта, сличение с нею имеющихся относительных минимумов величины (2) в случае, если эти последние окажутся существенно меньше $\delta^2 f$, может помочь обнаружить наличие систематических ошибок в экспериментальном определении значений f_j.

Эти практические выводы иллюстрируются на трех примерах. Схема основных вычислений включает построение схемы разностей функции $f(j)$, в которой исходные значения f_j составляют горизонтальную строку, и под каждой строкой разностей Δ_j^r $(r = \text{const})$ подписываются две вспомогательные строки — значений множителей $\binom{n-j}{r}\binom{r+j-1}{r}$ и произведений этих множителей на Δ_j^r — с записью соответствующих сумм правее этих строк. Вслед за этим идет вычисление величин β_r $(r = n-2, n-3, \ldots, 1, 0;\ \beta_{-1}$ служит для проверки) и, наконец, величин (2).

Примеры заканчиваются составлением графиков величин β_r и (2) $(r = -1, 0, 1, \ldots, n-1)$ с логарифмическим вертикальным масштабом. Рассмотрению первого из этих двух графиков автор придает существенное самостоятельное значение. В случае функции $f(x)$, допускающей удовлетворительное представление посредством полинома низкой степени, этот график обнаруживает характерную картину с наличием трех последовательных участков: 1) участок сильно выраженного падения величины $\log \beta_r$ (при возрастании r), 2) более или менее протяженный участок относительной стабилизации величины $\log \beta_r$ и 3) участок дальнейшего резкого падения величины $\log \beta_r \to -\infty$. Искомое наилучшее значение r здесь должно находиться в начале второго участка. Для более отчетливого выявления упомянутых участков автор пользуется графически сглаженным графиком.

В приложении к статье помещены вспомогательные таблицы численных значений величин $\binom{n-j}{r}\binom{r+j-1}{r}$, $\binom{n+r}{2r+1}$ и $\binom{2r}{r}$.

Дана ссылка на статью Смита (Smith M. G., Atomic Energy Res. Establ. Rept № 15/52), трактующую другим методом сходные вопросы. *Е. Я. Ремез*

4194. Приближенное определение корней полинома при помощи повторного вычисления линейных форм. Тасный-Часный (The location of the roots of polynomial equations by the repeated evaluation of linear forms. Tasn y-

Tschiassny L.), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 3, 319—326 (англ.)

Пусть некоторые из корней полинома $G_n(z)$ находятся внутри круга $|z| \leqslant 1$. Вводится вспомогательная рациональная функция

$$H(z) = \frac{G_n(z)}{F_m(z)} = \sum_{s=1}^{m} \frac{A_s}{z - z_s},$$

где $F_m(z) = \prod_{s=1}^{m} (z - z_s)$, $z_s = e^{i\frac{2\pi}{m}s}$, $m > n$,

и для приближенного определения положения упомянутых выше корней полинома $G_n(z)$ вычисляются значения функции $H(z)$ в узлах $z_{\mu,\nu}$ полярной координатной сетки, покрывающей единичный круг ($z_{\mu\nu} = (\nu/p)\exp i\mu 2\pi/g$, $\mu = 1, 2, \ldots, g$, где g — целое кратное m; $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$). После этого для более точного определения положения корней $G_n(z)$ предлагается применить линейную интерполяцию или другие известные методы. При указанном выборе полюсов функции $H(z)$ вещественные и мнимые части вычетов A_s, а также вещественные и мнимые части значений $H(z_{\mu,\nu})$ имеют вид линейных форм $\sum a_k b_k$ (где коэффициенты b_k могут быть вычислены раз навсегда), а значит (что особенно подчеркивается автором), удобно вычисляются на электронных или механических счетных машинах. Если коэффициенты полинома $G_n(z)$ вещественны, то (после введения некоторой новой переменной) вычеты A_s тоже будут вещественными (во второй из формул (7) должно быть u^n вместо u^{n-1}).

Введение функции $H(z)$, как указывает автор, подсказано теорией плоского электрического поля (Lucas F., C. r. Acad. sci., 1888, **106**, 645 — 648, 1072—1074). *В. Ф. Николаев*

4195. К интерполированию табличных функций показательными суммами и к вычислению собственных значений при помощи констант Шварца. Штифель (Zur Interpolation von tabellierten Funktionen durch Exponentialsummen und zur Berechnung von Eigenwerten aus den Schwarzschen Konstanten. Stiefel E.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 8—9, 260—262 (нем.)

Пусть задана таблица с шагом $h = 1$ функции $f(x)$: $f_0, f_1, f_2, \ldots$ Строится схема отношений и разностей: (см. табл.).

$$Q_i^k = \frac{f_{i+1}^k}{f_i}, \quad \Delta_i^k = Q_{i+1}^k - F_i^k,$$

$$\overline{\Delta}_i^k = \Delta_i^k + \Delta_{i+1}^{k-1}, \qquad f_i^{k-1} = f_{i+1}^k \cdot \overline{\Delta}_i^k$$

f	Q	Δ	$f^2 = \Delta \cdot f$	Q^2	Δ^2	$\overline{\Delta}^2 = \Delta^2 + \Delta$	$f^3 = \overline{\Delta}^2 \cdot f^2$	Q^3
f_0								
	Q_0							
f_1		Δ_0	f_0^2					
	Q_1			Q_0^2				
f_2		Δ_1	f_1^2		Δ_0^2	$\overline{\Delta}_0^2$	f_0^3	
	Q_2			Q_1^2				Q_0^3
f_3		Δ_2	f_2^2		Δ_1^2	$\overline{\Delta}_1^2$	f_1^3	
	Q_3			Q_2^2				
f_4		Δ_3	f_3^2					
f_5	Q_4							

Формулируются теоремы:

Теорема 1. Если

$$f(x) = a_1\lambda_1^x + a_2\lambda_2^x + \ldots + a_n\lambda_n^x, \qquad (1)$$

то $\overline{\Delta}^n = 0$ ($f(x)$ предполагается вещественной).

Теорема 2. Если λ_i вещественны, $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$ и $f(x)$ определена формулой (1), то $\lambda_k = \lim_{i\to\infty} Q_i^k$.

Эти результаты применяются к вычислению собственных значений симметричной положительно определенной матрицы A. Предполагается, что собственные значения различны: $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$; пусть им отвечают ортогональные и нормированные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Пусть вектор $a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ и $f_i = (A^i a, a) = \alpha_1^2\lambda_1^i + \alpha_2^2\lambda_2^i + \ldots + \alpha_n^2\lambda_n^i$ («константы Шварца»). Теорема 1 дает возможность экстраполировать константы f_i. Теорема 2 позволяет находить k-е собственное значение как предел Q_i^k при $i \to \infty$. Автор не отмечает, что последнее утверждение верно, если $\alpha_i \neq 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Указывается способ построения характеристического полинома. *И. П. Мысовских*

4196. Механизация астрономических вычислений. Куликов Д. К., Бюлл. Ин-та теор. астрономии АН СССР, 1953, 5, № 8, 512—545

Указывается, что основные вычислительные работы Института теоретической астрономии АН СССР выполняются в настоящее время на счетно-аналитических машинах. Дается краткое описание счетно-аналитических машин: перфоратора, табулятора (типов Т-5 и Д-11), сортировальной машины, репродуктора, множительного перфоратора. Приводятся два примера использования комплекта счетно-аналитических машин для астрономических вычислений: 1) вычисление элементов нутации; 2) составление нормальных уравнений.

В первом примере используются формулы

$$\Delta\psi_k = \sum a_i \sin A_{i,k},$$

$$\Delta\varepsilon_k = \sum b_i \cos A_{i,k},$$

где $\Delta\psi_k$, $\Delta\varepsilon_k$ — нутация по долготе и наклонности для момента времени t_k; a_i, b_i — постоянные; $A_{i,k}$ — линейные функции времени t_k.

Во втором примере по данной системе условных уравнений
$a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \ldots + a_{j,n}x_n = l_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$
требуется найти систему нормальных уравнений

$$A_{i,1}x_1 + A_{i,2}x_2 + \ldots + A_{i,n}x_n = L_i \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$A_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}a_{jk},$$

$$L_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}l_j.$$

А. И. Рыбаков

4197. Новый метод ускоряет расчет ковочных штампов. Герджел (New method speeds calculations for forging dies. Gurgel J. A. Amaral), Iron Age, 1953, **172**, № 1, 138—141 (англ.)

При расчете объема деталей, имеющих форму тела вращения и получаемых прессованием или ковкой, вместо вычисления определенного интеграла предлагается графический метод. Квадрат радиуса определяется как ордината графика параболы $y = R^2$, а множитель πdx находится как отрезок абсциссы при помощи прямой, наклоненной к оси OX под углом $\alpha = \text{arctg } 1/\pi$. При надлежащей ориентировке отрезков R^2 и πdx произведение их дается площадью прямоугольника, численно выражающего элемент объема $\pi R^2 dx$. Суммирование площадок, соответствующих отдельным элементам профиля детали, дает графически площадь, численно выражающую искомый объем тела вращения. Объемам полых частей тела вращения соответствуют вычитаемые площади. В случае сложного профиля детали суммирование площадок, соответствующих элементам дуги профиля, производится при помощи планиметра. Таким образом вычисление объема тела вращения сложного профиля сводится: 1) к построению некоторой площади при помощи шаблона параболы $y = R^2$ и шаблона угла $\alpha = \text{arctg } 1/\pi$ и 2) к определению величины этой площади с помощью планиметра.

Н. М. Несторович

4198. Номограммы для решения одномерной стационарной задачи теплопроводимости с учетом охлаждения в атмосферу. Мак-Гуайр, Фишл (Nomograms for solving one-dimensional steady-state conduction problems involving cooling to the atmosphere. McGuire J. H., Fischl C. F.), J. Instn. Heating and Ventilat. Engrs, 1953, **21**, № 219, 303—308 (англ.)

Предлагаются две номограммы из выравненных точек, одна из которых служит для определения термического сопротивления стены на единицу площади по разностям между температурой окружающего воздуха и температурами нагреваемой и ненагреваемой поверхности стены, а вторая — для определения температуры на заданной глубине внутри стены. Первая номограмма реализует формулу

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{R} = \sigma(\theta_1 + T_0)^4 - \sigma T_0^4 + H\theta_1^{1,25},$$

где θ_1 и θ_2 — данные переменные, а R — искомая (остальные величины постоянны). Вторая номограмма строится для формулы

$$\theta = \frac{R_A}{R}\theta_{12},$$

где θ_A — температура на заданной глубине, θ_{12} — разность температур на нагреваемой и ненагреваемой поверхности стены, R_A — термическое сопротивление на единицу площади для заданной глубины, R — термическое сопротивление на единицу площади для всей толщины стены.

Г. Е. Джемс-Леви

4199. Расчет давления при использовании труб из алюминия и легкоплавких соединений. Бенар, Кале (Pressions d'utilisation des tubes en aluminium et en alliages legers. Besnard Maurice, Calais René), Rev. aluminium, 1953, **30**, № 197, 124—125 (франц.)

Предлагается номограмма из выравненных точек для определения допустимого давления внутри трубы при заданных материале, диаметре трубы и толщине ее стенок. Номографируемая формула не приводится.

Г. Е. Джемс-Леви

4200 К. Скелеты номограмм уравнений третьего номографического порядка. Пентковский М. В., Тр. Ин-та точной механ. и вычислит. техн., 62 стр., Изд-во АН СССР, М., 1953, 3 р. 45 к.

Детально изложен новый метод построения номограмм уравнений 3-го номографического порядка, ранее указанный автором (Докл. АН СССР, 1948, **62**, № 5, 589—590).

Метод заключается в применении типовых номограмм уравнения

$$\xi + \eta = \zeta, \qquad (1)$$

названных скелетами, для построения номограмм уравнения

$$f_1 + f_2 = f_3, \qquad (2)$$

где f_i — функции переменных z_i $(i = 1, 2, 3)$.

В работе приведены 25 различных скелетов номограмм (скелеты на кривых 3-го и 2-го порядков и скелеты с прямолинейными носителями шкал), отличающихся геометрической структурой носителей шкал или проективных друг другу. Скелеты вычерчены в масштабе, удобном для практической работы. Для каждого скелета указаны уравнения его шкал.

Для построения номограммы какого-либо уравнения 3-го номографического порядка сначала приводят это уравнение к виду (2). Затем полагают

$$\xi = f_1,$$
$$\eta = f_2,$$
$$\zeta = f_3. \qquad (3)$$

Выбрав один из скелетов, накладывают на него кальку и строят на ней по уравнениям (3) шкалы z_1, z_2 и z_3. Это будет первый эскиз номограммы. Дальнейшее заключается в нахождении необходимого преобразования номограммы, уравнения которого имеют вид

$$\xi_1 = m(\xi + \alpha),$$
$$\eta_1 = m(\eta + \beta),$$
$$\zeta_1 = m(\zeta + \gamma), \qquad (4)$$

где α, β, $\gamma = \alpha + \beta$ и m — параметры. Преобразование выполняется геометрически на том же скелете, что возможно в силу простоты уравнений (4).

После подбора α, β и m значения ξ_1, η_1 и ζ_1 подставляют в уравнения шкал соответствующего скелета, рассчитывают и строят номограмму (в необходимых случаях можно предусмотреть и аффинные преобразования). Таким образом, задача построения номограммы в основном сводится к выбору подходящего скелета и значений параметров преобразования. Широкий класс преобразований, простота и наглядность их выполнения обеспечивают возможность получения удобных номограмм уравнения (2) в самых сложных случаях.

Для иллюстрации метода рассмотрено построение номограммы уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha_y = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\varphi}$$

и дан пример построения комплекса номограмм для зависимости

$$\Delta d = n\sin^2\alpha.$$

Г. С. Хованский

См. также: 3952, 3962, 4003, 4011, 4021, 4024, 4031, 4033, 4034, 4041, 4042, 4054, 4055, 4080, 4083, 4110, 4119К

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

4201. Электронная вычислительная машина (Electronic computing machine), Proc. Instn Radio Engrs Australia, 1953, **14**, № 11, обложка, 257 (англ.)

На фотографии (см. фото) показана часть австралийской электронной цифровой вычислительной машины КСИРО Марк 1 (C.S.I.R.O. Mk. I Computer; C.S.I.R.O. — Commonwealth Scientific and Industrial Research Organisation). Эта машина может производить до 500 арифметических

К реф. 4201

операций в 1 сек. и содержит 1500 радиоламп. Числа предс ставляются в двоичной системе счисления. Запоми ающее устройство на ртутных трубках и на магни ном барабане. Ввод программ и чисел в машину с существляется с перфокарт, а результаты вычисления автоматически печатаются в десятичной системе. Машина находится в эксплуатации около 18 месяцев. На ней решен ряд научных задач.

А. С. Федоров

4202. Составление программ для машины КСИРО Марк 1. I. Устройство машины. Пирси, Хилл (Programme design for the C. S. I. R. O. Mark 1 computer. I. Computer conventions. Pearcey T., Hill G. W.), Austral. J. Phys., 1953, **6**, № 3, 316—334 (англ.)

Дается описание устройства цифровой машины КСИРО Марк 1. Машина работает по двоичной системе счисления и имеет запоминающее устройство двух видов: 1) быстродействующее запоминающее устройство (время выборки 1 мсек.) на 1024 ячейки состоит из ртутных трубок, каждая на 16 ячеек, и 2) вспомогательное (время выборки 10 мсек.) на магнитном барабане, который содержит 4 группы по 1024 числа каждая.

Арифметическое устройство состоит из ряда регистров A, B, C, H и D, которые являются акустическими линиями задержки. Главный арифметический регистр A емкостью в одно число, так же как и регистры B и C. Регистр H хранит половину полного числа, регистр D хранит 16 чисел. Имеется ряд других регистров, не являющихся частями арифметического устройства: «вводной регистр», с которого вводимые данные считываются в память или в арифметическое устройство; «выводной регистр», через который записываются результаты; «постоянные регистры», хранящие константы, которые можно установить вручную. Действия машины контролируются кодами, хранящимися в трех регистрах: 1) «последовательный регистр» определяет, из какой ячейки памяти выбирать очередную команду; 2) «интерпретирующий регистр» получает и выполняет команду; 3) «контрольный регистр памяти» указывает, какая ячейка памяти подготовляется для использования. Приводится блок-схема машины.

Каждая ячейка памяти содержит 20 двоичных цифр, которые представляют собой число или команду. Запятая фиксирована. Отрицательные числа хранятся дополнительным кодом. В ходе вычислений все число в ячейке памяти можно разбить на некоторое число компонент, связанных или не связанных между собой. Например, в одной ячейке можно хранить действительную и мнимую часть комплексного числа. Команда кодируется как последовательность 20 двоичных цифр. Операция, определяемая командой, рассматривается как передача содержимого одного регистра в другой, и арифметическая операция зависит от того, как первый регистр передает число, а второй — принимает. В этом смысле система команд двухадресного типа.

Последовательно выполняемые команды хранятся в последовательных ячейках памяти и выбираются одна за другой. Описывается последовательность передач, необходимых для выполнения команды. Выбор очередной команды определяется содержимым «последовательного регистра», к которому при обыч-

ном ходе вычислений прибавляется 1 при каждой операции. Приводится полный перечень операций, выполняемых машиной, и принятая символика для их записи, а также принятый порядок записи команд.

Некоторые элементы конструкции машины отличают принятый метод построения программ от других машин: машина имеет несколько накапливающих регистров, что дает возможность реже обращаться к основной памяти; эти регистры часто используются для сбора данных, с которыми будет оперировать следующая часть программы. В ходе вычислений возможен как условный, так и безусловный переход к какой-либо части программы.

Объясняется выполнение некоторых операций, система ввода и вывода. Ввод данных с перфоленты в память производится по специальной программе. Результаты могут или печататься, или пробиваться на перфоленту. *Н. П. Трифонов*

4203. Составление программ для машины КСИРО Марк 1. II. Техника программирования. Пирси, Хилл (Programme design for the C. S. I. R. O. Mark 1 computer. II. Programme techniques. Pearcey T., Hill G. W.), Austral. J. Phys., 1953, **6**, № 3, 335—356 (англ.)

Дается общее описание характера программ. Описывается применение переменных команд при программировании и подробно объясняется типичный пример их использования, применение стандартных подпрограмм. Авторы вводят разбиение подпрограмм на два класса. Первый — подпрограммы, которые являются неизменными во всех задачах (например, подпрограмма извлечения корня). Подпрограммы этого класса они называют «subroutines». Второй класс — «routines» — это подпрограммы, которые используют параметры, различные в разных задачах, например, суммирование N чисел, расположенных в некоторой части памяти. Здесь параметрами является количество слагаемых и номер ячейки первого из них. Переменные, используемые в подпрограммах, обычно удерживаются в арифметических регистрах. Если число переменных больше емкости арифметических регистров, то они хранятся в стандартных ячейках памяти.

Описывается соединение подпрограмм в программу, подробно объясняется метод входа в закрытую подпрограмму и выхода из нее для данной машины, а также «первичная программа», которая служит для ввода данных с перфоленты в память. Приводится пример объединения нескольких подпрограмм в программу. Библиотека подпрограмм хранится на обычных перфокартах. Поскольку ввод в машину осуществляется только через перфоленту, то предварительно подпрограммы с перфокарт переносятся на ленту. Для избежания ошибок при набивке пробиваются две перфоленты независимо одна от другой и потом сравниваются компаратором. Результаты выводятся на перфоленту и затем переносятся на перфокарты. Специальных устройств для контроля нет. Работа отдельных блоков машины проверяется стандартными тестовыми программами.

В заключение рассматриваются использование магнитной памяти и методы ручного контроля машины. Методика программирования для КСИРО Марк 1 такая же как для ЭДСАК (Уилкс М., Уилер Д., Гилл С., Составление программ для электронных счетных машин, Изд-во иностр. литры, М., 1953). *Н. П. Трифонов*

4204. Цифровое запоминающее устройство на магнитном барабане. Купер (A magnetic drum digital storage system. Cooper B. F. C.), Proc. Instn Radio Engrs Australia, 1953, **14**, № 7, 169—177 (англ.)

Подробное описание вспомогательного запоминающего устройства на магнитном барабане вычислительной машины КСИРО Марк 1 (C.S.I.R.O. Mk 1), имеющей внутреннее запоминающее устройство на ртутных трубках (см. реф. 4202).

При вычислениях оба устройства могут использоваться равноправно. В магнитном запоминающем устройстве обычно хранятся редко используемые числа подпрограммы. Кроме того, имеются специальные команды для передачи числа из одного запоминающего устройства в другое.

На барабане хранится 1024 двоичных числа по 20 разрядов. Система записи чисел параллельная, вдоль образующей барабана размещено 20 головок для записи и считывания. Для хранения считываемого (записываемого) числа имеется специальный триггерный регистр, снабженный схемой сдвига для связи с последовательным запоминающим устройством на ртутных трубках. Скорость вращения барабана 6000 об/мин, диаметр 130 *мм*, длина 76 *мм*. Барабан покрывается при помощи пульверизатора ферромагнитным порошком на лаковой основе, имеющим высокое отношение H_c/B_r для уменьшения эффекта размагничивания. Плотность записи 3 импульса на 1 *мм*. Ферромагнитный слой предварительно намагничивается до насыщения постоянным магнитным полем, что соответствует записи «0». Цифра «1» записывается импульсом противоположной полярности. В такой системе удваивается амплитуда считываемых сигналов и облегчается их синхронизация.

Рассмотрены электрические схемы устройства и конструкция головок. Число ламп 280. Проектируется барабан емкостью 4096 чисел, имеющий 2048 чисел по окружности и два комплекта головок. Число ламп в таком устройстве около 300.

Н. Я. Матюхин

4205. Вычислительная машина (Computer), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 8, 711 (англ.)

Сообщение фирмы «Компьютер Рисёрч Корпорейшн» (Computer Research Corp.) о главных характеристиках вычислительной машины CRC-102A (РЖМат, 1954, 2382). Число выполняемых арифметических и логических операций 25. Время, отводимое на каждую операцию, примерно 60 мсек. Точность вычислений $0{,}2 \cdot 10^{-10}$. Возможно программировать вычисления с двойной точностью и с учетом порядков. Исходные данные вводятся в машину оператором либо вручную с клавиатуры, либо полуавтоматически с перфолентой, либо автоматически с перфокарт ИБМ или из запоминающего устройства на магнитной ленте, управляемого машиной. Вывод результатов производится в восьмиричной либо в десятичной системе на телетайпе, перфоленте, перфокартах, либо посредством записи на магнитную ленту. Главное запоминающее устройство — магнитный барабан, имеющий 1024 ячейки. Среднее время выборки числа с барабана 12,5 мсек. Имеется дополнительный запоминающий регистр на 8 ячеек. Среднее время выборки числа из него 1,6 мсек. Сообщается о средствах, предусмотренных для кон-

троля программы и использования подпрограмм.
А. Б. Залкинд

4206. Автоматические вычисления в самолетостроении. Олуэй (Automatic computing in aircraft engineering. Alway G. G.), Engineering, 1953, **176**, № 4572, 351 (англ.)

Излагаются некоторые результаты работы, выполненной за последние 18 месяцев в Национальной физической лаборатории в связи с эксплуатацией электронной вычислительной машины АКЕ (ACE) (РЖМат, 1954, 2408, 2752). Машина имеет ограниченную быстродействующую память (предполагается расширить память при помощи магнитного барабана), но в ряде задач в качестве вспомогательной памяти с успехом применялись перфокарты. Особенно успешно применялась машина для решения задач линейной алгебры. Имеется программа для решения систем линейных уравнений с суммой числа неизвестных и числа правых частей, доходящей до 191 (что позволяет обращать матрицы до 95-го порядка). Созданы программы для вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы. В случае вещественных собственных значений они позволяют оперировать с матрицами до 15-го порядка без использования памяти на перфокартах и до 92-го порядка с использованием такой памяти. В случае комплексных собственных значений эти порядки снижаются до 10 и 32.

Указанные программы часто применяются для выполнения вычислений по расчету самолетов на флаттер. Описывается математическое содержание этих расчетов, указывается назначение используемых программ и скорость работы по ним. При расчетах на флаттер исследуемая механическая система заменяется системой с конечным числом степеней свободы n (при этом значительная часть работы сводится к вычислению определителей n-го порядка).

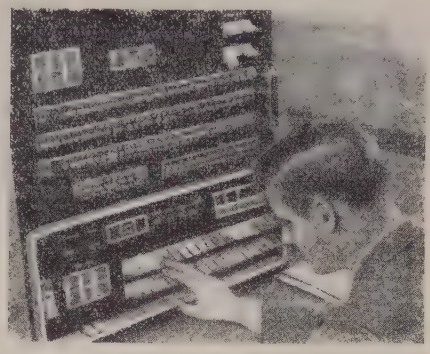
При ручных вычислениях практически доступные значения n не превышают 4, существующие моделирующие устройства позволяют рассматривать 6 степеней свободы, применение машины АКЕ позволило увеличить значения n до 8. *Д. П. Гроссман*

4207. Внешнее оформление вычислительной машины. Фиггинс (Appearance design for computer. Figgins Richard W.), Electr. Manufact., 1953, **52**, № 1, 150, 290, 292 (англ.)

При разработке конструкции вычислительной машины ИБМ-701 (РЖМат, 1954, 1853, 2375, 2376) большое внимание было уделено тому, чтобы придать каждому из 11 блоков красивый внешний вид, соответствующий притом функциональному назначению этих блоков. Особое внимание было уделено оформлению пульта управления с тем, чтобы обеспечить наибольшую эффективность работы.

Панель пульта разбита на три зоны. Первая из них (нижняя) предназначена для размещения всех переключателей, часто используемых в работе, и соответствующей световой сигнализации. Основные переключатели клавишного типа (см. фото). Каждая тройка этих переключателей имеет различную расцветку, одинаковую для идентичных групп, сообразно с применяемой в машине двоичной системой счисления. Система разных цветов позволяет легко различать группы клавишных переключателей и приводит к сокращению ошибок оператора.

В машине использованы прямоугольные кнопочные переключатели, размещаемые в декоративных хромированных рамках. Некоторые из этих переключателей сделаны, с учетом психологических соображений, большего размера, чем другие. Так, например, кнопка «пуск» вдвое больше обычной, кнопки «стоп» и «выключение питания» не только



Креф. 4207

больше обычных, но и помещены глубже, чтобы предотвратить опасность случайного их нажатия.

Вторая зона (в центре панели) содержит неоновые световые индикаторы. Здесь нанесены линии разграничений и т. д., обеспечивающие нужную наглядность. В третьей зоне (сверху) располагаются световая сигнализация и переключатели, редко используемые в работе. Легкое различение световых сигналов, общее количество которых составляет около 200, достигается употреблением прозрачной пластмассы, которая хорошо обрабатывается и имеет невысокую стоимость.

Контрольные приборы на пульте электропитания смонтированы также с учетом наилучшего различения; в частности, использованы приборы разных габаритов и форм. *Е. И. Мамонов*

4208. Универсальные быстродействующие цифровые машины: десятичная запоминающая система. Килберн, Орд (Universal high-speed digital computers: a decimal storage system. Kilburn T., Ord G.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1953, **100**, ч. 11, № 77, 513—522 (англ.)

При решении ряда задач (например, задач коммерческого и статистического характера) общее время ввода-вывода данных может превосходить длительность вычисления, причем десятично-двоичные преобразования еще более ограничивают скорость вычислений. Для подобных задач двоичная система является невыгодной. Описывается запоминающее устройство на электроннолучевых трубках (э. л. т.) осциллографического типа, в котором можно осуществить хранение чисел в прямом десятичном коде. Рассмотрены обычная система запоминания двоичных цифр в э. л. т. (метод «точка-тире») и три системы запоминания десятичных чисел: две — с непрерывной разверткой и одна — с десятью отдельными элементами для каждой десятичной цифры. В первой системе длина тире соответствует значению цифры. Положительный сигнал в начале считывания тире обеспечивает прохождение стробирующих импульсов на выходе усилителя считывания, количество которых определяется длиной тире и скоростью развертки.

На улучшенных образцах э. л. т. при токе луча 0,25—0,5 *мка* и диаметре пятна 0,25—0,3 *мм* опти-

мальная скорость развертки, соответствующая компромиссу требований компактности, надежности и быстродействия, равна примерно 0,2—0,5 *мм/μсек*.

Во второй системе для лучшего фиксирования конца тире при высоких скоростях развертки луч на короткое время останавливается в конце тире. Эта система лучше по скорости работы, но менее компактна по емкости хранения, чем первая система.

В третьей системе для представления десятичной цифры используется десять двоичных запоминающих ячеек (по методу «точка-тире»). В ячейке, соответствующей по номеру запоминаемой цифре, хранится «1», в остальных «0». В улучшенном варианте этой системы емкость трубки уменьшается на 15% и время выборки — на 10% по сравнению с методом хранения десятичных цифр в двоично-кодированной форме. В экспериментальном устройстве на одной трубке хранилось 32 8-значных числа, время выборки каждого числа 320 μсек.

В приложении описан новый метод запоминания двоичных чисел, позволяющий в два раза увеличить плотность записи на экране и скорость считывания по сравнению с обычным методом «точка-тире». Метод применим только для последовательных запоминающих устройств. Растр при этом имеет плотность, необходимую для размещения одних только точек («0»). «1» изображается тире, расположенным от одной точки до другой, последовательность «1» — соответственно более длинным тире. Максимальная полученная частота следования разрядов 500 *кгц*. Сравнительные показатели всех трех систем приведены в таблице.

Система	Длина цифры (*см*)	Длительность цифры (*μ сек*)	Относительная амплитуда импульса
1. Системы с непрерывной разверткой в линии.			
а) первая система скорость развертки 0,2 *мм/μ сек*	0,85	40	0.7
скорость развертки 0,55 *мм/μсек*.	1,2	22	1,1
б) вторая система скорость развертки 1,5 *мм/μсек*.	1,5	11,5	0.3
2. Система с десятью раздельными элементами (улучшенный вариант)	0,75	25	1,0

Е. И. Мамонов

4209. Запоминающая трубка с непосредственным наблюдением. Смит, Браун (Direct-viewing memory tube. Smith S. T., Brown H. E.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 9, 1167—1171 (англ.)

В трубке имеются две электронные пушки; одна из них служит для записи, другая дает рассеянный пучок медленных электронов. Вблизи экрана смонтированы коллекторная и сигнальная сетки. Последняя на стороне, обращенной к электронной пушке, имеет напыленный слой диэлектрика (ортосиликат цинка). Сигнальная сетка изготовлена из нержавеющей стали, имеет 6,5 проволок (диаметром 0,05 *мм*) на 1 *см*.

Стекло экрана трубки покрыто с внутренней стороны прозрачным проводящим слоем (хлорид свинца), на который нанесен тонкий слой фосфора.

Перед началом работы диэлектрик заряжается отрицательно путем понижения напряжения на катоде поддерживающей пушки до потенциала, при котором коэффициент вторичной эмиссии меньше единицы. После того как диэлектрик зарядился, напряжение на катоде пушки опять увеличивают до номинальной величины. Сфокусированный записывающий луч быстрых электронов преодолевает стабилизирующее действие поддерживающего потока и заряжает облучаемую площадь до высшего равновесного потенциала (потенциала коллектора). Поддерживающий поток удерживает потенциал положительно заряженных элементов, так как электроны падают на эти места диэлектрика со скоростью, при которой коэффициент вторичной эмиссии больше единицы. Поддерживающий поток сохраняет отрицательно заряженные места диэлектрика приблизительно на уровне потенциала катода пушки медленных электронов, поскольку в этом случае коэффициент вторичной эмиссии меньше единицы, и происходит накопление электронов.

Электроны, прошедшие сквозь ячейки сигнального экрана, падают на фосфор, заставляя его светиться. Яркость изображения тем выше, чем больше плотность тока и выше ускоряющее напряжение (напряжение проводящего покрытия экрана). Величина ускоряющего напряжения ограничена возможностью возникновения холодной эмиссии и лежит в пределах 4—5 *кв*.

Контрастность изображения можно регулировать изменением потенциала сигнальной сетки, на которую нанесен диэлектрик. В центре экрана изображение имеет наименьшую контрастность, так как электроны поддерживающего пучка падают на сигнальную сетку под прямым углом и отражаются от отрицательно заряженных элементов в меньшем количестве.

Скорость записи определяется плотностью тока в записывающем луче и емкостью диэлектрика. В описываемой трубке при диаметре луча 1,1 *мм* и плотности тока 1 *ма/см*^{2} скорость записи составляла 37000 *см/сек*.

Наилучшая разрешающая способность была получена в трубке с диаметром экрана 8,9 *см*. Она позволяла писать линии 0,4 *мм* толщины, отстоящие друг от друга на 0,15 *мм*. Переходная область между положительно и отрицательно заряженными элементами на диэлектрике менее 0,025 *мм*, однако на светящемся экране граница между белым и черным получается около 0,125 *мм* из-за фокусирующего действия ячеек сигнальной сетки. Чтобы избежать сильного отклонения траектории электронов, прошедших сквозь ячейки сетки, последняя располагается как можно ближе к экрану (0,125 *мм*). Если ускоряющий потенциал поддерживающей пушки вдвое выше потенциала, при котором коэффициент вторичной эмиссии равен единице, то трубка сохраняет информацию более чем 1 час. В обесточенной трубке потенциальный рельеф сохраняется около двух недель.

Описываются несколько способов получения полутонов изображения, а также получения черного изображения на светлом фоне. *В. Н. Лаут*

4210. Применение схем совпадения для получения десятичных счетных схем из двоичных счетчиков на триггерах Паршад, Сагар (Coincidence technique for getting decade scaling from binary flip-flop counters. Parshad R., Sagar A.), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 7, 542—544 (англ.)

Описано несколько вариантов триггерных десятичных счетных схем, состоящих из четырехразрядного двоичного счетчика и диодных схем совпадения в цепях обратной связи, позволяющих к каждым 10 входным импульсам добавлять 6 ($2^4 = 16$), так что после 10 импульсов схема приходит в исходное состояние. Применение схем совпадения упрощает схему, повышает надежность и не снижает быстродействия. Описана схема включения неоновых ламп для указания состояний счетчика.

В. К. Зейденберг

4211. Применение больших цифровых вычислительных машин для вычислений в области микроволновой спектроскопии. Хикс, Тёрнер, Уайдьюл (Applications of large digital computers to calculations of microwave spectroscopy. Hicks B. L., Turner T. E., Widule W. W.), J. Chem. Phys., 1953, 21, № 3, 564 (англ.)

В баллистической лаборатории (Абердин, США) машины ЭДВАК (EDVAC — см. РЖМат, 1953, 476) и ОРДВАК (ORDVAC) использовались для расчетов по двум спектрографическим задачам.

На ЭДВАК производились просчет таблиц энергетических уровней асимметрических ротаторов для более частой сетки квантовых чисел, чем это делалось раньше, и расширение таблиц в сторону больших значений полных моментов количества движения. Ведутся работы по уточнению методов расчета и исследованию влияния сделанных при расчетах упрощений.

На ОРДВАК производились вычисления вращательных констант асимметрических вращающихся молекул и квантовых чисел из заданных структурных параметров для 1200 моделей молекул этиленамина. Программа для последней задачи обобщена для неограниченного числа моделей любой молекулы и для ее различных изотопов.

Н. Я. Матюхин

4212. «Психологическая машина» армии США находит людей, подходящих для данного дела (Army «Robot Psychologist» finds right men for the right jobs), Popul. Mech. Mag., 1953, 100, № 4, 113 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3105, 3106. Приводится общий вид машины.

4213. Электронная вычислительная машина получила усовершенствованное запоминающее устройство (Electronic «Giant brain» has memory improved), Photogramm. Engng, 1953, 19, № 4, 648 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2417, 2418.

4214. Первая вычислительная машина получила новую «память» (Venerable computer gets new memory), Tele-Tech, 1953, 12, № 9, 15 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2417, 2418.

4215. Моделирующее устройство решает геофизические проблемы. Кауфман (Analog computer solves geophysical problems. Kaufman S.), Electronics, 1953, 26, № 6, 174—177 (англ.)

Для некоторых геофизических исследований необходимо по результатам многочисленных магнитометрических или гравиметрических измерений на поверхности земли вычислять параметры поля под поверхностью земли. Типичным является случай, когда приходится производить вычисления по 4000 исходным данным; для каждой точки необходимо найти сумму произведений 43 из 4000 значений на соответствующие заранее заданные коэффициенты. Всего обычно требуется найти не менее 20 000 таких сумм.

Для выполнения указанных вычислений построено специализированное электрическое моделирующее устройство (см. фото). Исходные данные задают-

К реф. 4215

ся в виде напряжений, устанавливаемых на 900 потенциометрах с грубой и плавной регулировкой. Потенциометры не градуированы и поэтому требуемая величина напряжения вначале устанавливается на точном калиброванном потенциометре, а затем уже методом сравнения переносится на потенциометр исходных данных. Нуль-индикатором служит электронная схема.

Напряжения от всех потенциометров выведены на контакты коммутационной панели и к этим контактам присоединяется подвижная контактная панель, имеющая 43 расположенных определенным образом контакта, каждый из которых, в свою очередь, присоединяется к соответствующему делителю для задания коэффициентов, на которые требуется умножать исходные данные.

Переключение коэффициентов одновременно с переключением контактов подвижной панели осуществляется при помощи телефонного искателя. Изменение напряжения на каждом потенциометре исходных данных за счет нагрузки его делителем коэффициентов учитывается при первоначальной настройке напряжений исходных данных.

На выходе делителя коэффициента появляется напряжение, пропорциональное произведению заданной функции на соответствующий коэффициент. Измерение полученного напряжения производится при помощи особого устройства, использующего принцип дискретного счета и состоящего из электронной сравнивающей цепи и счетчика-хронографа.

Сигнал начала измерений запускает интегрирующий контур и счетчик, который начинает считать импульсы от кварцевого генератора. На вход

интегрирующего контура подается постоянное напряжение, поэтому на выходе напряжение растет строго линейно с течением времени. Когда напряжение на выходе интегрирующего контура достигает величины напряжения на входе сравнивающей цепи, то счетчик останавливается, и по числу подсчитанных импульсов судят о величине измеренного напряжения.

После окончания одного замера искатель переходит в следующее положение и вновь полученная величина суммируется автоматически с предыдущей. Для подсчета отрицательных величин имеется второй счетчик. После выполнения всех 43 произведений результат, полученный на втором счетчике, вычитается из полученного на первом счетчике. Сорок три умножения выполняются за 10 сек. Каждый счетчик имеет емкость до 10^6 импульсов. Полное время вычислений около 40 сек. на одну точку, включая время ввода исходных данных (т. е., повидимому, 10 рабочих часов на все 900 точек, а всего около 50 рабочих часов на задачу). Погрешность вычислений получается небольшой.

Даны принципиальная схема модели, схема сравнивающей цепи и общий вид установки.

Н. В. Корольков

4216. Вычислительная машина для быстрого расчета потенциальных полей. Кауфман (An analog computer for rapid computation of potential-field data. Kaufman S.), Instruments, 1953, **26**, № 1, 120—124 (англ.)

См. реф. 4215.

4217. Моделирующее устройство, использующее магнитные усилители и многофазное переменное напряжение. Ричардсон (Analog computing with magnetic amplifiers using multiphase A-C voltages. Richardson John E.), Conven. Rec. Inst. Radio Engrs, 1953, ч. 7, 30—33 (англ.)

Описаны принципы построения моделирующего устройства для решения алгебраических и трансцендентных уравнений и ряда задач векторной алгебры. В качестве переменных величин применяется переменное напряжение, заданное амплитудой и фазой и моделирующее двумерный вектор. Основные элементы устройства разработаны на базе магнитных усилителей и полупроводниковых выпрямителей. В качестве основных элементов использованы два типа детекторов и модулятор. Каждый тип детектора имеет два входа и реагирует либо на разность амплитуд, либо на разность фаз входных сигналов. Напряжение с выхода детекторов управляет модулятором, имеющим соответственно два входа для управления фазой и для управления амплитудой выходного напряжения. Приведены схемы соединения этих элементов для решения простейших уравнений, для получения множительного устройства и т. д.

А. Н. Мямлин

4218. Электрические аналогии для исследования гидравлических систем. Часть 2. Характеристики труб. Милстон (Electric analogies for hydraulic analysis. Part 2 —Tubing characteristics. Millstone Sidney D.), Mach. Design, 1953, 25, № 1, 166—170 (англ.)

Вопрос о характере движения жидкости по трубам имеет большое значение для работы гидравлических сервомеханизмов. Неустойчивый сервомеханизм иногда можно сделать устойчивым путем перестановки его элементов, за счет чего изменяется длина соединительных труб.

Движение жидкости по трубам может быть приближенно описано системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} + R_x q_0 + \frac{\rho}{A}\left(\frac{\partial q_0}{\partial t}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial q_0}{\partial x} + G_x P_0 + \beta A\left(\frac{\partial P_0}{\partial t}\right) = 0,$$

где P_0 — давление, q_0 — расход.

Такими же уравнениями описывается прохождение тока по длинной линии. Применяя схему замещения длинной линии, можно моделировать движение жидкости по жестким трубам. Колена и различная арматура могут быть представлены на модели омическими сопротивлениями. Движение жидкости в гибких шлангах не может быть представлено простой электрической схемой из-за нелинейности параметров. Небольшие отрезки гибких шлангов на схеме могут быть представлены большими емкостями.

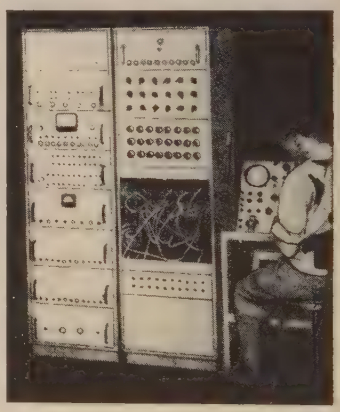
Указывается, что в следующих двух частях будет описано применение метода электроаналогий для исследования различных гидравлических систем.

Н. В. Корольков

4219. Электронное моделирующее устройство ЭАСЕ (EASE — Electronic Analog Simulating Equipment), Electronics, 1953, **26**, № 6А, 137 (англ.)

Объявление фирмы «Беркли» (Berkeley division of Beckman Instruments Inc.) о новом электронном моделирующем устройстве ЭАСЕ (EASE). На машине можно решать обыкновенные дифференциальные уравнения 20-го порядка. Решение такого уравнения вместе с установкой задачи занимает не более двух часов. Машина проста в эксплуатации, компактна, занимает площадь около 1 $м^2$, стоимость 6850 долл. Приведена фотография (см. фото).

Л. С. Легезо



К реф. 4219

4220. Вычислительная машина (Computer), Chem. and Engng News, 1953, **31**, № 31, 3210 (англ.)

См. реф. 4219.

4221. Моделирующее вычислительное устройство (Analog computer), Instruments, 1953, **26**, № 7, 982 (англ.)

Сообщение фирмы «Норт-Американ Филипс» (North American Philips Co.) о самопишущем устройстве для вычерчивания диаграммы частоты следования импульсов. Скользящий контакт переменного сопротивления вращается синхронным мотором так,

что сопротивление в цепи пропорционально времени, и при подаче на цепь постоянного напряжения записываемый ток будет обратно пропорционален времени. При подаче в цепь напряжения, пропорционального показаниям счетчика, записанная диаграмма тока будет соответствовать диаграмме средней частоты импульсов. Масштаб устанавливается либо специальной масштабной схемой, либо скоростью вращения контакта.

Прибор приспособлен для подключения к нему вспомогательного импульсного генератора.

Л. С. Легезо

4222. **Моделирующее счетное устройство** (Analog computer), Radio and Telev. News, 1953, **50**, № 1, 22 (англ.)

См. реф. 4221.

4223. **Новая счетная машина для подсчета экономичности линий передачи** (New computer to figure transmission economies), Electr. World, 1953, **140**, № 7, 29 (англ.)

Сообщение компании «Американ Газ энд Электрик Сервис Корпорейшн» (American Gas and Electric Servis Corp.) о решении применить счетную машину для более быстрого и точного подсчета экономичности передачи в главных энергетических системах. Ожидают, что машина будет ежегодно экономить компании около 100.000 долларов. Машина будет вычислять и передавать необходимую информацию на электростанции с целью перераспределения нагрузки между электростанциями. Уменьшая нагрузку наиболее удаленных электростанций, можно будет уменьшить общие потери передачи в системе. Машина дает результат, зависящий от 1290 переменных величин, значения которых устанавливаются в соответствии с физическими данными энергетической системы компании. Машина будет иметь размеры около 4×1,5 *м*, вес 2,5 *т* и будет строиться фирмой «Дженерал Электрик» (General Elecktric); стоимость ее будет более 100.000 долларов. *Л. С. Легезо*

4224. **Электронные вычислительные машины. Карльсен** (Electroniske hjerner. Karlsen Gerhard), Tekn. og. fys., 1953, 8, № 6, 209—218 (норв.)

Краткий обзор последних достижений в области вычислительной техники; обсуждается вопрос о возможностях, которые открываются для науки и техники с созданием быстродействующих электронных вычислительных машин. Приводятся интересные данные о работе уже действующих электронных вычислительных машин в США.

В Высшем исследовательском институте (Institute for Advanced Study) в Принстоне электронная вычислительная машина в течение трех часов отрабатывает прогнозы погоды, для вычисления которых понадобилось бы при работе с арифмометром три столетия.

Электронная вычислительная машина, используемая нефтяной компанией (The Sunray Oil Co.), вычисляет данные по движению нефти через 124 нефтепровода в течение 3 мин., в то время как вычислителю для этого потребовалось бы не менее целого дня.

Электронный преобразователь непрерывных величин в дискретные (digital analog convertor), выпущенный фирмой «Дуглас» (Douglas Aircraft Co.), успешно применяется для автоматизации производственных процессов.

Фирмой «Ремингтон Ранд» построены три машины типа УНИВАК (РЖМат, 1953, 934). Первая из них работает два года в Бюро переписи США, вторая — в Воздушном управлении американской армии, третья — в Топографическом управлении. Постройка машины «Тайфун» (Typhoon) фирмой RCA (RCA — Radio Corporation of America) для американского флота стоила 1,5 млн. долларов, но только по одному заданию использование этой вычислительной машины сэкономило 250 млн. долларов. «Тайфун» использовался для моделирования полетов управляемых снарядов.

Фирма ИБМ выпускает малогабаритную электронную машину ИБМ-604 (см. РЖМат, 1953, 1439, а также «Быстродействующие вычислительные машины», М.—Л., 1953, стр. 146), 800 таких машин уже находятся в эксплуатации.

Фирмой «Белл» (Bell Telephone Co.) построена специализированная электронная машина АМА (Automatic Message Accounting System), используемая для определения времени междугородних телефонных переговоров и подсчета тарифной платы за них (РЖМат, 1953, 512).

Другая специализированная машина типа «Резервизор» («Reservisor») используется американскими компаниями воздушных сообщений для диспетчерской работы по регулировке воздушных перевозок и продажи билетов на самолеты. Фирмой «Ремингтон Ранд» выпущена для коммерческих целей работающая на перфокартах электронная машина типа 409-2 (РЖМат, 1954, 2747). Машина обрабатывает 9000 перфокарт в 1 час, на каждой из них запрограммировано до 40 операций.

Приводится ряд фотографий электронных вычислительных машин: УНИВАК, SSEC (Selective Sequence Electronic Calculator), ИРА-1103 (РЖМат, 1953, 933; 1954, 1850, фотография этой машины в статье перевернута). *Н. Я. Матюхин*

4225. **Моделирующие устройства и вычислительные машины для электрических систем** (Analyser, and computers for electrical systems), Nature 1953, **172**, № 4379, 614 (англ.)

Перечень докладов, заслушанных на сессии, организованной Отделом электротехники Имперского колледжа в июле 1953 г. в Лондоне, в том числе по следующим вопросам: решение вычислительных задач при помощи цифровых машин и моделирующих устройств; различные методы решения дифференциальных уравнений; использование полуавтоматических вычислительных машин и др. Указывается, что для крупных организаций желательно иметь цифровые вычислительные машины, в то время как для многих инженерных расчетов часто удобнее и проще применять моделирующие устройства, не требующие большой подготовительной работы для постановки задач.

А. Б. Залкинд

4226. **Кто чем занят в области счетных машин и автоматики. Часть 3 — Все виды занятий, кроме производства и программирования. 1-й список, сводный, по состоянию на 10 июня 1953 г., включающий фамилии с начальными буквами от Е до К** (Who's who in computers ans automation: Section 3 — Not business, not programming — E to K. 1-st ed., cumulative, information as of

June 10, 1953), Computers and Automation, 1953, **2**, № 5, 22—27 (англ.)

Сводный список научных работников, инженеров, работников промышленности и торговых предприятий, интересующихся различными вопросами в области счетных машин и автоматики. Указывается область интересов (приложения, проектирование, разработка, электроника, математика, продажа). В список включено 135 человек, почти все из них живут в США.

4227. Авторы статей специального выпуска журнала «Proceedings of the I. R. E.», посвященного вычислительным машинам (Contributors to Proceedings of the I. R. E.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1522—1530 (англ.)

Краткие сведения о 59 авторах статей по вычислительным машинам. Приведены время и место рождения, сведения об образовании и ученых степенях, данные, характеризующие научную и практическую деятельность, фотографии.

4228. Требуются математики для помощи электронным вычислительным машинам (Mathematicians needed to help «brain»), Mach. Design, 1953, **25**, № 5, 236 (англ.)

Обсуждается вопрос о потребности в значительном количестве квалифицированных математиков, чтобы загрузить работой существующие и строящиеся электронные вычислительные машины.

Приводятся некоторые краткие сведения об электронной вычислительной машине ИБМ-701 (РЖМат, 1954, 1853, 2375) и фотография этой машины. *Н. Я. Матюхин*

4229. Электронные лампы с переключением луча для вычислительных машин и для управления. Кучинский (Beam switching tubes for computers and controls. Kuchinsky Saul), Tele-Tech, 1953, **12**, № 9, 88—90, 108, 110—112, 114 (англ.)

Описание принципа действия и способов использования трех вариантов ламп магнетронного типа TR-SR-11, TR-BC-11, TR-DC-11 фирмы «Берроус» (Burroughs) (десятичный триггер, кодирущая лампа, десятичный счетчик), имеющих 10 анодных сегментов и соответственно 10 устойчивых положений электронного луча за счет использования падающей вольтамперной характеристики сегментов. Анодное напряжение ламп 100 *в*, ток луча около 0,5 *ма*, аксиальное магнитное поле (от постоянного магнита) 350 *гс*.

Скорость переброса луча (максимальная) с одного сегмента на соседний 6 *Мгц*. Сопротивления нагрузки сегментов выполнены в виде угольной пленки, распыленной на керамике, и помещены внутри баллона. При снижении анодного напряжения лампы генерируют колебания на частотах от 10 *кгц* до 10 *Мгц* в зависимости от характеристик лампы и постоянной времени нагрузок сегментов. Управление перебросом луча осуществляется подачей импульсов на анод, катод или на сегменты. Лампы критичны к выбору длительности и амплитуды запускающего импульса.

Описана также селекторная лампа SEL-10, представляющая собой малогабаритный электронный переключатель с 10 сегментами, в котором луч управляется при помощи отклоняющих пластин. Анодное напряжение 250 *в*, чувствительность по отклоняющим пластинам 12 *в* на один сегмент. Лампа SEL-10 используется для управления магнетронными лампами (приведена схема).

Приведены таблицы основных параметров ламп SEL-10 и TR-SR-11. Габариты ламп не превышают размеров обычных радиоламп; лампы пригодны для массового производства. Указано, что лампы описанных типов могут быть использованы для счетчиков, вычислительных машин, кодирующих устройств, устройств преобразования непрерывных величин в дискретные, многоканальных систем связи и т. п. *В. К. Зейденберг*

4230. Блок запоминающего устройства для счетной машины (Computer memory unit), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 9, 120A, 122A (англ.)

Сообщение фирмы «Компьютер Контрол» (Computer Control Co.) о выпуске стандартного блока запоминающего устройства на твердой акустической линии. Группа таких блоков образует запоминающее устройство счетной машины. Один блок в процессе эксплуатации машины легко может быть заменен другим. В блоке хранится одновременно 384 двоичные цифры; частота повторения 1 *Мгц*; несущая частота 20 *Мгц*; входное напряжение на клапане чтения 10 *в*; выходное напряжение 15 *в* при нагрузке 100 *ом*; имеется нагревательный элемент с терморегулятором для стабилизации температуры линии задержки. Размеры блока 14×12×25 *см*. Блок специально предназначен для использования в авиационной аппаратуре и нечувствителен к ударам. *Л. С. Легезо*

4231. Блочные схемы. Стандартизированные блоки для электронных вычислительных машин. Лорант (Packaged circuits. Standardized plug-in units for electronic computors. Lorant Michael), Wireless World, 1953, **59**, № 9, 433—434 (англ.)

Указывается, что современные электронные счетные машины имеют десятки тысяч элементов и сотни тысяч паек. Нарушение работы одного из элементов ведет к неправильной работе машины и к простою. Для быстрой замены вышедшего из строя элемента необходимо применять стандартные блоки. Национальное бюро стандартов США разработало ряд стандартных блоков для вычислительных машин (РЖМат, 1954, 1841, 2411). Стандартные блоки используются в машине СЕАК (РЖМат, 1954, 2748) и в английской машине фирмы «Эллиотт» (РЖМат, 1953, 1435). Отмечается, что для охлаждения элементов внутри блоков применяется принудительный обдув, причем воздушный поток проходит от наиболее чувствительных к теплу германиевых диодов к менее чувствительным элементам. Приведены фотографии блоков Бюро стандартов и машины ЭЛЛИОТТ-401. *Л. С. Легезо*

4232. «Унифицированное» оборудование для импульсных устройств управления («Unitized» pulse control equipment), Electronics, 1953, **26**, № 8, 45 (англ.)

Рекламное объявление фирмы «Берроус» (Burroughs) о выпуске ряда импульсных устройств (импульсный генератор, каскад совпадения, импульсная линия задержки, триггер, дешифратор, смеситель и др.), смонтированных в отдельные блоки

и пригодных для применения в счетных машинах, локации, телевидении, телеметрии, ядерной физике. Описан триггерный блок типа 1101 С на пентодах, работающий на частоте 2,5 *Мгц* от импульсов длительностью 0,1 *мксек* и амплитудой 12 *в*. Перепад напряжений триггера 23 *в* при выходном сопротивлении 680 *ом*. Приведена фотография блока.

Л. С. Легезо

4233. Радиочастотный дроссель (RF choke), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 9, 165A (англ.)

Сообщение фирмы «Грейбэрн» (Grayburne) о выпуске миниатюрного радиочастотного дросселя на ферритовом сердечнике с высокой магнитной проницаемостью. Его сопротивление постоянному току 120 *ом*, индуктивность 25 *мгн*±5%, распределенная емкость 8 *мкмф*, добротность на частоте 100 *кгц* 115, на частоте 450 *кгц* 80, максимальный ток 100 *ма*. Приводится фотография дросселя; длина его около 15 *мм*, диаметр около 7 *мм*. *Л. С. Легезо*

4234. Миниатюрный импульсный трансформатор (Pulse transformer smallest in the world), Aviat. Age, 1953, **19**, № 3, 81 (англ.)

Сообщение американской фирмы PCA Electronics о выпуске импульсного трансформатора типа MPT 101-0,1 для применения в авиации, в наземных установках, в счетно-решающих устройствах и в счетных цепях. Трансформатор в основном предназначен для формирования импульса, однако может использоваться и для связи. Длительность импульса, создаваемого трансформатором, составляет около $0{,}1 \cdot 10^{-6}$ сек., время нарастания не превышает $0{,}005 \cdot 10^{-6}$ сек. Новая техника проектирования и применение сердечника из специального ферромагнитного материала позволили изготовить импульсный трасформатор с габаритами меньше чем горошина (см. фото). Диапазон рабочих температур от —70° до +125°.

К реф. 4234

В. А. Зимин

4235. Миниатюрный импульсный трансформатор (Small pulse transformer), Electr. Manufact., 1953, **51**, № 1, 134, 136 (англ.)

См. реф. 4234. *В. З.*

4236. Печатные схемы и уменьшение габаритов радиоприборов. Эйслер (Printed circuits and miniaturization. Eisler P.), Electronic Engng, 1953, **25**, № 3—4, 234—238 (англ.)

Предлагается использовать печатные схемы, выполненные на тонком изолирующем листообразном основании, из которого делается особый раскрой фигурной формы. После нанесения схемы на лист методом штамповки или накатки тонкого серебряного или медного фигурного покрытия частично устанавливаются составляющие схему радиодетали. Отдельные части листа загибаются так, что образуется трехмерная фигура, например коробчатого типа.

Минимальные размеры радиоприбора при этом будут в основном определяться размерами деталей, из которых он составляется, и минимальными расстояниями между этими деталями. Возможность электрического пробоя, а также увеличение паразитных емкостей при сближении деталей задают предел уменьшению расстояний между деталями. Ремонт схемы предполагается делать посредством развертывания трехмерной схемы обратно в плоскую. При этом облегчается доступ к составляющим схему деталям.

Тонкая листовая печатная схема сама недостаточно жестка и не может служить основанием для укрепления даже маленьких радиодеталей. Предлагается использовать металлическую или керамическую конструкцию, на которой можно закреплять как саму схему, так и детали. Приводится фотография усилителя на печатной схеме, использующего такой жесткий каркас.

Указывается, что достоинствами печатных схем рассмотренного типа являются следующие: 1) печатная схема занимает мало места, так как она делается на тонком листе; 2) листовую печатную схему можно согнуть в нескольких местах и сделать из нее «трехмерную» печатную схему, которая создает возможность хорошего использования полезного объема прибора, так как детали, составляющие схему, и сам лист схемы могут располагаться довольно тесно.

Даются ссылки на статьи и патенты по рассмотренному вопросу (4 наименования).

В. С. Бородин

4237. 37-я выставка физического общества. — Печатные схемы фирмы «Эллиотт» (The 37-th Physical society exhibition.— Elliott printed and potted circuits), Electronic Engng, 1953, **25**, № 303, 213 (англ.)

Сообщение о том, что на выставке экспонировались миниатюрные печатные схемы фирмы «Эллиотт». Схемы влагостойки, невосприимчивы к ударам, выполнены в герметической укупорке, очень малы по размерам. *Л. С. Легезо*

4238. Устройство для соединения без пайки (Solderless connector), Railway Signaling and Communs, 1953, **46**, № 9, 639 (англ.)

Сообщение фирмы «Уэстерн Электрик» (Western Electric Co.) о разработке устройства для соединений без пайки. Устройство представляет собой пистолет с вращающимся либо воздухом, либо электроприводом шпинделем, имеющим два осевых отверстия. Одно служит для помещения в него клеммы, другое — для провода. При вращении шпинделя провод плотной спиралью наматывается на клемму. Степень натяжения проволоки регулируется. Подобное соединение надежно электрически и более прочно механически, чем обычная пайка, малочувствительно к вибрации, более удобно в производстве, позволяет уменьшить размеры клемм и расстояние между ними. Проектируемый срок службы 40 лет. Приведена фотография. *Л. С. Легезо*

4239. Устройство для изгиба перфораторной ленты. Хаупт (Perforated tape creasing devides. Haupt F. J.), Western Union Techn. Rev., 1953, **7**, № 2, 51—55 (англ.)

Если трансмиттер работает медленнее подающего ему ленту реперфоратора, образуется запас перфо-

ленты, который хранится в специальном коллекторе. Во время прохождения ленты через перфоратор в коллектор лента электризуется и прилипает к стенкам коллектора вместо того, чтобы падать на дно. Это сильно ограничивает емкость коллектора.

Описывается способ профилирования перфоленты на выходе реперфоратора, при котором лента в поперечном сечении принимает форму буквы U, причем лента становится более жесткой и трению подвергается меньшая часть ее поверхности.

Стандартный тип коллектора может хранить 21,5 *м* обычной ленты и 79 *м* профилированной ленты.

Л. В. Кутуков

4240. Характеристика магнитной ленты с повышенной отдачей. Льюк, Уэцел (Performance of high-output magnetic tape. Lueck L. B., Wetzel W. W.), Electronics, 1953, **26**, № 3, 131—133 (англ.)

Сообщение о новой магнитной ленте («Scotch» Brand № 120), дающей без увеличения уровня помех выходной сигнал, больший на 6 *дб*, чем дает стандартная американская лента («Scotch» Brand № 111).

Дается сравнение кривых намагничивания, амплитудных и частотных характеристик для трех типов лент: германской ленты типа L и двух американских (№ 111 и № 120). Остаточная индукция составляет соответственно: (L) 100 *гс*, (№ 111) 500 *гс*; (№ 120) 1100 *гс*.

Рассмотрены некоторые вопросы, связанные с производством магнитных лент и способами улучшения их магнитных свойств. Указано, что новая магнитная лента позволяет увеличить отношение выходного сигнала к уровню помех, уменьшить ширину «дорожки» записи и уменьшить скорость движения ленты.

Если в германских магнитофонах при использовании ленты L линейность частотной характеристики сохраняется до 10 *кгц* при скорости движения ленты 0,75 *м/сек*, то новая магнитная лента позволяет сохранить эту линейность до 15 *кгц* при скорости движения ленты 0,18 *м/сек*. *В. В. Бардиж*

4241. Стабильный источник питания для вычислительных машин (Precision power supply for computers), Prod. Engng, 1953, **24**, № 6, 268 (англ.)

Сообщение фирмы «Инэт» (Inet, Inc.) о выпуске нового высокостабильного источника питания для вычислительных машин. Приведена фотография. См. РЖМат., 1954, 2761. *Н. Я. Матюхин*

4242. Уровни энергии в электронике полупроводникового триода. Кобленз, Оуэнс (Energy levels in transistor electronics. Coblenz Abraham, Owens Harry L.), Electronics, 1953, **26**, № 4, 138—141 (англ.)

Популярное изложение общих понятий о некоторых терминах и определениях теории твердого тела и полупроводников.

На ряде опытов и примеров показана дискретность возможных значений энергии, или уровней энергии электрона, находящегося в сфере влияния ядра; дано понятие о квантовых состояниях электрона и зонах энергетических уровней. Рассмотрено характерное для кристаллических полупроводников и изоляторов наличие зоны запрещенных уровней, разделяющей заполненную зону валентной связи и зону проводимости; приведены сравнительные данные относительно ширины запрещенной зоны некоторых полупроводников (0,7 *эв* для германия, 1,1 *эв* для кремния) и диэлектриков (7 *эв* для алмаза).

Статья из специальной серии статей по теории и применению полупроводниковых триодов, публикующейся в журнале «Electronics».

Н. И. Бродович

4243. Полупроводниковый триод или лампа? Гендерсон (Transistor or valve? Henderson F. E.), Electr. and Radio Trading, 1953, **25**, № 282, 91—92 (англ.)

Кратко рассмотрены особенности технологии, создающие трудности в изготовлении германиевых триодов. Отмечается, что после лабораторных разработок и изготовления триодов опытными заводами следует ожидать уже в 1954 г. массового выпуска триодов.

Так как полупроводниковый триод не может быть помещен вместо лампы в действующей схеме, не следует предполагать непосредственного вытеснения лампы германиевыми триодами. Однако целый ряд ценных свойств полупроводниковых триодов позволяет осуществить их выгодное использование во многих областях техники, в том числе в электронных вычислительных машинах.

Н. И. Бродович

4244. Разработка маленьких полупроводниковых триодов — шаг по пути к безламповым радиоустановкам. Хилл (The development of tiny transistors brings tubeless radio a step closer. Hill Bruce), Iowa Engr, 1953, **53**, № 8, 14—16 (англ.)

Статья содержит краткое описание германиевых триодов.

4245. Электромеханический интегратор. Уитли (An electromechanical integrator. Wheatley B. M.), Brit. J. Radiol., 1953, **26**, № 317, 382 (англ.)

Сообщение об электромеханическом интеграторе фирмы «Электро-Методс» (Electro Methods, Ltd.), в котором силы трения, потери в железе, контактные сопротивления сведены до весьма малых величин. Благодаря этому зависимость между скоростью вращения мотора и напряжением имеет линейный характер даже без цепи обратной связи. Кроме того, этот интегратор потребляет мощность всего в несколько микроватт и может быть без усилителя мощности непосредственно подключен к фотоэлементу или термопаре. Благодаря малому моменту инерции вращающихся частей (1,8 $г \cdot см^2$) постоянная времени мотора равна приблизительно 10 *мсек*. Максимальная скорость мотора равна 2000 об/мин. Возможно подключение к мотору механического счетчика или потенциометра. Интегратор имеет небольшие габариты и невысокую стоимость.

Производились предварительные испытания интегратора в физическом отделе Британского онкологического госпиталя (Physics Department of the Royal Cancer Hospital), которые дали положительные результаты. Наибольшее отклонение характеристики интегратора от прямой наблюдалось при низких напряжениях (0, 1 *в*) и составляло 12%. В пределах от 1 *в* до 7 *в* характеристика интегратора практически совпала с теоретической прямой.

Е. А. Волков

4246. Что нового дала выставка? (Was bringt die Messe im Burga-Haus?), Feinmech. Handwerk, 1953, **7**, № 8, 5—9 (нем.)

На выставке в Лейпциге 1953 г. были представлены также и образцы продукции точной индустрии, в том числе и счетного машиностроения. Дается описание машин германского производства. Завод «Фортуна» в Зуле выпустил новые модели ручного арифмометра «Мелита» с колесом Однера, имеющие контрольный указатель правильности ввода числа, сквозную передачу десятков в обоих счетчиках. При делении появившаяся в счетчике оборотов единица, после переноса делимого в счетчик результата, автоматически гасится, чем устраняется возможность ошибки в результате. В машине возможен обратный перенос числа из счетчика результата в установочный барабан. При относительно большой емкости машины — счетчик результатов 16 разрядов, счетчик оборотов 8 разрядов и установочный барабан 10 разрядов — вес машины всего 4 *кг*, а внешние размеры 205×130×130 *мм*, так что машину можно носить в портфеле. *А. Л. Леймер*

4247. Новые счетные линейки для сварщиков (Nowe suwaki spawalnicze), Przegl. spawaln., 1953, **5**, № 10, 228 (польск.)

Сообщение о том, что «Бюро сбыта технических материалов и сварочного оборудования» (Biuro Zbytu Technicznych Materialów i Sprzętu Spawalniczego) выпустило счетные линейки двух новых типов, предназначенные для сварщиков: первая — для подсчета времени и расхода материала при ацетиленовой и электродуговой сварках и при кислородной резке, вторая — для подсчета времени и расхода материала при ацетиленовой сварке и резке.

4248. Счетный прибор для расчета воздушных компрессоров (Calculator for air compressors), Mach. Lloyd Overseas Ed., 1953, **25**, № 10, 119 (англ.)

Сообщение фирмы «Эйр Пампс» (Air Pumps, Ltd., London) о выпуске специальной счетной линейки для расчета воздушных компрессоров в соответствии с Британским стандартом 1937 г. B. S. 726.

Линейка имеет пять подвижных логарифмических шкал, каждая из которых может передвигаться независимо от других между двумя неподвижными логарифмическими шкалами.

Длина линейки около 23 *см*, ширина около 9 *см*.

4249. Счетная линейка для взаимного перевода атомного и весового процентного содержания компонент двойных сплавов. Рейчингер (A slide-rule for the interconversion of atomic and weight percentages for any binary alloy system. Rachinger W. A.), J. Inst. Metals, 1953, **82**, ч. 1, 38 (англ.)

При исследовании сплавов часто приходится вычислять a, зная w, и w, зная a, при данных A и B, основываясь на уравнении

$$w/(100-w) = (A/B)\cdot[a/(100-a)],$$

где A и B — атомные веса компонент, $w\%$ — содержание A по весу, $a\%$ — содержание A по числу атомов. Вычисление сводится к простому отсчету по шкале, если применять счетную линейку, на корпусе которой нанесены шкалы $\log A$ и $\log [w/(100-w)]$, а на движке — шкалы $\log B$ и $\log[a/100-a)]$. После совмещения меток A и B остается только выполнить простой переход от метки w к противостоящей метке a или обратно. Для значений w и a от 0,4 до 99,6 построена линейка длиной 61 *см*. *В. М. Брадис*

4250. Счетный прибор для трехмерной съемки Исследовательского совета по кинематографии. Хилл (The Motion Picture Research Council 3-D calculator. Hill Armin J.), Amer. Cinematographer, 1953, **34**, № 8, 373, 398 (англ.)

В процессе стереокиносъемки требуется выполнение некоторых расчетов, необходимых для определения установки осей в зависимости от фокусного расстояния объективов и расстояния до плоскости главного плана, а также для получения других нужных оператору числовых данных. Описан изготовляемый в Голливуде прибор, имеющий форму счетной линейки с круговыми шкалами диаметром около 10 *см* («счетные часы»), прикрепляемый к камере и механизирующий получение этих данных. *В. М. Брадис*

4251. Настоящее и будущее электроники. Джарвис (Electronics today and tomorrow. Jarvis Kenneth), Scale J., 1953, **39**, № 5, 7—8 (англ.)

Статья является последней из трех статей, опубликованных автором в 1952 и 1953 гг. под этим же названием в различных журналах. После сравнительной оценки электронных ламп и полупроводниковых триодов, заканчивающейся выводом о перспективности последних, даны примеры возможных применений полупроводниковых триодов в области счетной техники, связи и управления, а также подчеркнуто значение полупроводниковых триодов в военной технике. В конце статьи приведены антинаучные сопоставления счетных устройств, управляемого оборудования и самих полупроводниковых триодов с человеческим мозгом. *Н. И. Бродович*

4252. Следящие системы, кибернетика и информация. Фогель (Servomécanismes, cybernétique et information. Vogel Th.), Nuovo cimento, 1953, **10**, Suppl., № 2, 166—196 (франц.)

Дается очерк теории следящих систем. Автор статьи, по образцу Н. Винера, относит теорию следящих систем к так называемой кибернетике и допускает во введении (§ 1) ряд ненаучных высказываний.

Следящие системы рассматриваются как системы передачи информации. В § 2 рассматривается передача полезной информации в линейных следящих системах с сосредоточенными элементами. Описываются методы исследования динамики таких систем при помощи преобразования Лапласа (Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р., Теория следящих систем, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951). Разбираются критерии устойчивости, точности и быстродействия, а затем излагается методика расчета следящей системы по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

В § 3 рассматривается фильтрация паразитной информации в линейных системах на основе статистической теории информации (Wiener N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, John Wiley and Sons, New York, 1949).

После теоретической части кратко обсуждаются методика и аппаратура для определения корреляционной функции из экспериментальных данных, в том числе электронный коррелятор Массачузетского технологического института (Lee Y. W., Cheatham T. P., Wiesner J. B., Proc. Inst. Radio Engrs, 1950, **38**, № 10, 1165—1171). § 4 посвящен нелинейным системам. Разбираются вопросы устойчивости и фильтрации. В конце статьи приводится большой список зарубежной литературы.

В статье не учитываются работы советских авторов. *Г. Н. Поваров*

4253. Вступительная речь перед Королевской академией точных, физических и естественных наук в Мадриде 11 февраля 1953 г. Маннебак (Allocution prononcée devant la Real academia de ciencias exactas, físicas y naturales, á Madrid, le 11 fevrier 1953. Mannebaack Charles), Rev. Real acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid, 1953, **47**, № 1, 49—56 (франц.)

Дается критический обзор так называемой кибернетики. Автор считает, что кибернетика не является действительной научной дисциплиной, а представлят собой смесь различных теорий, гипотез и мнений. Отмечается, что кибернетика возрождает «старые мифы об автомате-человеке и искусственной жизни».

Рассматривая области, причисляемые Н. Винером к кибернетике, автор выделяет теорию устройств с автоматическим управлением и автоматическим регулированием. В качестве важнейших достижений в области таких устройств автор указывает современные быстродействующие вычислительные машины и приборы автоматического управления зенитным огнем, работающие совместно с радиолокаторами. Отмечаются частные теории, которые, как указывает автор, возникли в этой области благодаря запросам техники: теория следящих систем, теория фильтров (Wiener N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, Wiley, New York, 1949) и статистическая теория информации (К. Шеннон). Упоминаются работы Бриллюэна по применению понятия отрицательной энтропии в связи (Brillouin L., Principe de neguentropie pour l'information — Article dans l' ouvrage «Louis de Broglie, physicien et penseur», Albin Michel, Paris, 1952).

Затем автор кратко касается кибернетической трактовки вопросов физиологии и психологии. По мнению автора, физиология так же несводима к теории автоматических устройств, как физика — к механике, хотя отдельные аналогии могут оказаться полезными. В области психологии автор считает, что творческие функции мышления не поддаются механизации.

Критика кибернетики автором недостаточно последовательна. Некоторые общие положения автора неприемлемы с точки зрения диалектического материализма. *Г. Н. Поваров*

4254. Промышленные и военные применения кибернетики. Пост (Cybernetics for industry and military applications. Post Geoffrey), Tele-Tech, 1953, 12, № 8, 64—65, 132, 134, 136, 138, 140 (англ.)

Дается краткий очерк теории автоматического управления с обратной связью. Рассматриваются следящие системы и цифровые вычислительные устройства. Особое внимание уделяется комбинированию следящих элементов с цифровыми вычислительными элементами. Отмечается значение статистических методов для исследования систем с обратной связью.

Приводится принципиальная схема полностью автоматизированного завода, который благодаря атомной силовой установке может длительное время работать самостоятельно, а также часть принципиальной схемы устройства автоматического управления стрельбой с самолета по летящей цели.

В статье употребляется ненаучная терминология, характерная для так называемой кибернетики. Некоторые выводы автора неприемлемы с точки зрения диалектического метериализма.

Г. Н. Поваров

4255. Новейшая наука — кибернетика. Гассан (Cybernetics — The newest science. Gassan Arnold), Colorado Engr, 1953, **49**, № 3, 32, 33, 38, 46, 50, 54, 62 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2784.

4256. «Отдых» или «шок» помогают устранить неполадки в работе вычислительной машины (Rest, shock operate to make «brains» work), Sci. News Letter, 1953, **63**, № 19, 295 (англ.)

4257. Итальянский центр кибернетики (Centro Italiano di Cibernetica), Civiltá machine, 1953, **1**, № 4, 79 (итал.)

Сообщение о состоявшемся 15 апреля 1953 г. в Риме заседании Итальянского центра кибернетики, имеющего целью руководить работами по кибернетике в Италии. Устные доклады собираются, публикуются и высылаются по требованию.

4258. Исследования по автоматическим цифровым вычислительным машинам в Советском Союзе. Фортуна (The Soviet Union: Automatic digital computer research. Fortuna Tommaso), Computers and Automation, 1953, **2**, № 6, 1—2 (англ.)

Кратко сообщается о работах по вычислительной технике, опубликованных в Изв. АН СССР, Отд. техн. н. в 1946—1948 гг. (применение счетно-аналитических машин для математических вычислений и т. п.). Некоторые утверждения автора имеют анекдотический характер; таково, например, указание на работы М. В. Остроградского по топологии (в подлиннике: «...works as those of... M. B. Ostrogradski in the theory of topological sets,...»).

П.

4259 К. Сборка счетно-решающих механизмов. Эйдес И. Г., Кулаков В. А., 220 стр., Судпромгиз, Л., 1953, 6 р. 70 к.

Освещаются вопросы технологии сборки счетно-решающих механизмов. Книга предназначается для учащихся ремесленных училищ, рабочих механиков, инженеров и техников.

4260 РЕЦ. Обзор электронных цифровых счетных машин (Review of electronic digital computers, 114 pp., New York, American Institute of Electrical Engineers, 3.50 doll.) **[Рецензия: Хартри** (Hartree D. R.), J. Scient. Instrum., 1953, **30**, № 1, 30 (англ.)]

4261 РЖ. **Общество статистиков страхового дела. Доклад Комитета по новым средствам записи и счетным устройством (сентябрь 1952)** (Society of Actuaries: Report of Committee on New Recording Means and Computing Devices, September 1952, VII+107 pp., Now York, 1952) [**Рецензия: Хартли** (Hartley H. O.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, **116**, ч. II, 208 (англ.)]

4262 РЖ. **Введение в кибернетику: искусственная мысль. Латиль** (Introduction à la cybernétique: la penseé artificielle. Latil Pierre de, 332 pp., Gallimard, Paris, 1953, 890 fr.) [**Рецензия: Булиган** (Bouligand G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, **60**, № 7-8, 253; **Рюссо** (Russo F.), Rev. questions scient., 1953, **14**, 444—445 (франц.)]

4263 П. **Схема быстродействующего запоминающего устройства. Серрелл** (Transitory memory circuits. Serrell Robert) [Radio Corporation of America]. Пат. США 2639859, кл. 235—61, 26.05.53

Схема состоит из регистра адреса, регистра приема кода, регистра сравнения искомого адреса с содержимым регистра адреса и позволяет выбирать код, содержащийся на искомом адресе запоминающего устройства. *А. Б. Залкинд*

4264 П. **Электронное устройство для деления и умножения. Диккинсон, Фелпс, Бергфорс** (Electronic dividing and multiplying apparatus. Dickinson Arthur H., Phelps Byron E., Bergfors Carl A.) [International Business Machines Corporation, Нью-Йорк, США]. Пат. США 2624508, кл. 235—61, 6.01.53

Десятичный регистр для хранения произведения (делимого); каждый разряд регистра состоит из двоично-десятичного счетчика и схем приема (суммирования) и сдвига.

4265 П. **Считывающие цепи запоминающих трубок. Райхман, Меснер, Розенберг** (Reading circuit for storage tubes. Rajchman Jan A., Mesner Max H., Rosenberg Milton) [Radio Corporation of America]. Пат. США 2645712, кл. 250—27, 14.07.53

Усилитель для усиления выходных сигналов от селектрона, снабженный на выходе вентилем для отделения полезного сигнала и триггером, управляемым от вентиля, для приема информации.

4266 П. **Запоминающее устройство** (Information storage apparatus) [Minister of Supply]. Австрал. пат. 151548, кл. 05.5, 4.06.53

Запоминающее устройство на обычной электростатической трубке, в котором использована система «фокус-дефокус». *И. Д. Горелова*

4267 П. **Счетная лампа. Вальмарк** (Impulse counting tube. Wallmark John T.) [Radio Corporation of merica]. Пат. США 2638541, кл. 250—27, 12.05.53

Специальная счетная лампа, в которой имеется общий катод, общий управляющий электрод и десять пар вторичных эмиттеров и коллекторов. Каждый эмиттер соединен с нагрузочным сопротивлением коллектора предыдущей пары через запускающую емкость. При подаче на управляющий электрод запирающего импульса электронный луч переходит с одного эмиттера на следующий. *В. К. Зейденберг*

4268 П. **Электронный счетчик. Деш** (Electronic counter. Desch Joseph R.) [National Cash Register Co., Dayton, Ohio, США]. Пат США 2644110, 2644111, 2644112, 30.06.53

Три варианта десятичных счетных схем на тиратронах с двумя сетками, в которых экранная сетка тиратрона предыдущего разряда связана с управляющей сеткой следующего; аноды и катоды тиратронов через один соединены в две группы.

Рассмотрены варианты схем с запуском по анодам и по катодам. *В. К. Зейденберг*

4269 П. **Система электрической задержки. Кром** (Electric delay system. Krom Myron E.) [Bell Telephone Laboratories, Inc., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2636931, кл. 175—320, 28.04.53

Система электрической задержки на реле, время-задающим элементом которой является RC цепочка с изменяемыми величинами R и C. Для задания начальной величины заряда на емкости имеется специальное диодное устройство. *В. К. Зейденберг*

4270 П. **Универсальный дешифратор. Зентграф** (Universal decoding mechanism. Zentgraf John A.) [Remington Rand Inc., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2633491, кл. 178—26, 31.03.53

Релейный дешифратор для расшифровки пробивок на перфокарте, в котором реле управляются от считывающих фотоэлементов. *В. П. Черенин*

4271 П. **Счетный прибор. Винтерфельдт** (Calculating instrument. Winterfeldt Arthur F.). Пат. США 2637499, кл. 235—88, 5.05.53

Прибор, предназначенный для некоторых расчетов в кинематографии и позволяющий по данным значениям двух величин находить значение третьей. Состоит из двух дисков с цифровыми метками и прорезами, имеет диаметрально расположенный указатель. *В. М. Брадис*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

4272. **Электроника в области атомной энергии. Парсегян** (Electronics in the atomic energy field. Parsegian V. L.), Trans. Inst. Radio Engrs, 1953, PGIE-1, № 8, 16—25 (англ.)

Рассматриваются в общих чертах некоторые вопросы, связанные с использованием электронных устройств как при управлении технологическими процессами получения атомной энергии, так и при исследовании этих процессов путем моделирования; описываются также специфические особенности условий работы этих электронных устройств.

Отмечается, что электрические вычислительные устройства, особенно непрерывного действия, оказались очень полезными при моделировании процессов и разрешении проблем, связанных с исследованием механических, электрических, гидравлических и теплотехнических систем.

При производстве атомной энергии аппаратура контроля и управления работает в весьма тяжелых условиях: при высоких температурах, больших скоростях процессов и вредном действии излучений. Изучение связанных с этим переходных процессов и изменений состояния веществ с постоянной времени порядка 1 мсек. относительно просто можно производить при помощи моделирующих устройств. *В. Б.*

4273. Распределение нефте- и газопродуктов, получаемых от батареи скважин, по отдельным скважинам с применением перфорированных карт. Эймикс, Гатри, Робинсон, Мур, Мартинес, Тауэр (Allocating battery oil and gas production to individual wells... Using punched-card computing system. Amyx J. W., Guthrie R. K., Robinson W. M., Moore A. M., Martinez Raymond, Tower J. R.), Oil and Gas J., 1953. **51**, № 39, 66—69, 78—79 (англ.)

Излагается метод механизированного решения посредством счетно-аналитических машин следующей задачи: известный месячный общий выход нефтепродуктов и газопродуктов по батареям скважин требуется распределить по входящим в данную батарею скважинам в отдельности. Попутно подсчитывается и водосодержание в общей добыче скважины.

Указывается на возможность решения — на основе образования для решения этой задачи массивов перфокарт — других вопросов экономико-статистического характера.

Статья снабжена пятью иллюстрациями, отражающими функциональные связи между массивами, участвующими в решении задачи. *И. Я. Акушский*

4274. Передача информации в телеграфных буквопечатающих системах. Коггешалл (The transmission of intelligence in typescript. Coggeshall I. S.), Western Union Techn. Rev., 1953, **7**, № 2, 56—62 (англ.)

Рассматриваются с точки зрения количества импульсов, необходимых для передачи одной буквы или цифры, различные типы телеграфных кодов, в частности используемые в системе Морзе—Вестона, в 5- и 6-значной системе Бодо, в 7-значной системе «с обнаружением ошибки», в системе с кодом Филипса и др. Приводится конкретный пример кодирования одного и того же текста в различных телеграфных системах и указывается число единичных кодовых элементов (импульсов), нужных для передачи одной буквы в каждой из рассмотренных систем. Это число кодовых элементов находится в пределах от 2,5 до 9,3.

Уменьшение числа импульсов на знак требует расширения полосы передаваемых частот, что приводит к усложнению и удорожанию аппаратуры, но в ряде случаев (для междугородных и международных телеграфных систем) все-таки является экономически целесообразным.

Даются некоторые соображения относительно передачи факсимиле по телеграфу.

Библиография 20 названий. *В. С. Бородин*

4275. Системы импульсно-кодовой модуляции. Оксфорд (Pulse code modulation systems. Oxford A. J.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1953, **13**, № 5, 265—274 (англ.)

Приводятся общие соображения относительно принципов импульсной передачи непрерывных электрических величин. Рассматриваются две системы импульсно-кодовой модуляции (и.-к. м.), по устройству более простые, чем ранее существовавшие; приведены блок-схемы модуляторов и демодуляторов и описаны принципы их работы.

Для нормальной работы первой системы и.-к. м. необходима жесткая синхронизация работы модулятора и демодулятора, для чего, кроме импульсов полезного сигнала, с передающего пункта посылаются синхронизирующие импульсы.

Вторая из предлагаемых систем и.-к. м. не требует наличия вспомогательных импульсов на приемном и передающем пунктах и по устройству получается проще первой системы.

Указывается, что детальных испытаний для выяснения оптимальных условий работы рассмотренных систем и.-к. м., особенно второй, не проводилось.

Библиография 15 названий. *В. С. Бородин*

4276. Автоматическая система телеграфной связи (Automatic teletype system), Bell Labs Rec., 1953, **31**, № 5, 195 (англ.)

Описывается автоматическая система телеграфной связи 81-D-1 с тремя центральными автоматическими распределительными пунктами (в Чикаго, Нью-Йорке и Форт-Уорс) для обслуживания 70 телеграфных станций авиалиний, находящихся в различных местах страны. Определяемые с этих станций телеграммы поступают в один из центральных распределительных пунктов, где запоминаются в релейном запоминающем устройстве и уже без участия оператора автоматически передаются по назначению, когда освобождается соответствующая линия.

Срочные телеграммы, как, например, с борта самолета, автоматически передаются первыми; это обеспечивается соответствующей программой обработки телеграмм в системе. В случае неисправности на приемной станции или неправильного указания ее адреса телеграмма перфорируется на ленте и сохраняется на центральной станции до тех пор, пока неисправность не будет устранена. *В. С. Бородин*

4277. Оборудование «Телетайпзеттер» на предприятиях фирмы «Белл». Смолли (Teletypesetter equipment in the Bell system. Smalley M. N.), Bell Labs Rec., 1953, **31**, № 5, 183—186 (англ.)

Описывается выпускаемый фирмой «Телетайп» (Teletype Corp.) комплект автоматической телеграфной аппаратуры, состоящий из перфоратора, трансмиттера, телетайпа с реперфоратором и устройства, аналогичного приемному телетайпу, которое управляет линотипом или другой строкоотливной машиной. Перфоратор снабжен устройством для автоматического выравнивания длины строк; для записи на перфоленте применяется шестипозиционный код, что дает возможность, используя два знака для перевода в верхний и нижний регистры, получать 124 комбинации, необходимые для управления линотипом. Скорость набора при работе линотипа от трансмиттера в два раза выше, чем при ручной работе.

4278. Автоматическое устройство для уменьшения ошибок (Automatic error-reduction equipment), Telegr. and Teleph. Age, 1953, **71**, № 5, 19 (англ.)

Устройство для повышения надежности трансокеанской телеграфной связи, разработанное Голландским телеграфным управлением, запоминает последние три переданные знака и автоматически повторяет передачу этих знаков, если один из них искажается на приемном пункте помехами или замираниями. *О. К. Щербаков*

4279 П. Телефонная система с импульсно-кодовой модуляцией. Бейли (Telephonic pulse-code-modulation system. Bailey Christopher Edmund Gervase) [Hartford National Bank and Trust Co., Hartford, Conn., США]. Пат. США 2647238, кл. 332—11, 28.07.53

Устройство для периодического измерения непрерывных звуковых сигналов и импульсно-кодовой модуляции полученных импульсов. Приведена схема устройства. *О. К. Щербаков*

4280 П. Устройство импульсно-кодовой модуляции (Pulse code modulation) [Standard Telephones and Cables Pty. Ltd.]. Австрал. пат. 152776, кл. 05.5, 27.08.53

Устройство импульсно-кодовой модуляции, в котором входной импульс через схему задержки поступает на схему сравнения амплитуд, направляющую импульс по одному из двух каналов в зависимости от того, больше его амплитуда эталонной или же меньше или равна. Сигнал с выхода каналов усиливается в 2 раза и подается снова на вход схемы задержки.

Рециркуляция прерывается через n повторений (n — число двоичных разрядов кода), последовательность импульсов из одного или другого канала представляет прямой или обратный код входного импульса.

См. также: 4196

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абдельхаи 4069 **К**
Агарвал 4084
Адам 4098
Александрийский Б. И. 4051
Аллен 4135 **РЕЦ**
Альфан 4063
Амбле 4192
Антосевич 4190
Аржаных И. С. 3927
Армитидж 4104
Аруффо 4129

Б

Байер 4147 **РЕЦ**
Бакельман И. Я. 4175 **Д**
Бандьопадхьяй 4163
Бауи 3934
Бейли 4279 **П**
Беккер 4077 **РЕЦ**
Беккерт 4052
Бекман 4080
Белинский П. П. 3995
Бенар 4199
Бергдал 3935
Бергман 3996 **РЕЦ**
Бергфорс 4264 **П**
Березин Ф. А. 3969
Беренс 4193
Бертолини 4060
Бине 4109
Блакман 4125
Бламбер 3991, 3992
Блануша 4158, 4159
Бляшке 3932 **РЕЦ**
Боду 4016
Бозе 4166
Болотин В. В. 4058
Боль 4156
Борисевич Ю. Г. 4184
Борсук 3973, 3978
Бразма Н. А. 4022
Браудер 4012
Браун 4209
Брафман 4085
Буане 3962
Булиган 4072 **РЕЦ**, 4262 **РЕЦ**
Бусленко Н. 4095

В

Вальмарк 4267 **П**
Ван-Данциг 4101
Ван-дер-Варден 4133
Вейнгарден 3952
Вейрих 4018
Вейсман 4057
Вецгер 4049
Вивье 3966, 3967
Винтерфельдт 4271 **П**
Винтнер 4170
Ворович И. И. 4003
Врынчану 4167
Вудс 4182
Вулф 3964
Вычихло 3941

Г

Гассан 4255
Гатман 4113
Гатри 4273
Гендерсон 4116
Гендерсон 4243
Герджел 4197
Гере 4074 **РЕЦ**
Гехт Б. И. 3984
Гилман 4121
Гинсберг 4091
Годо 4146 **РЕЦ**
Горн 4139
Граф 4077 **РЕЦ**
Гриб А. А. 4014
Грин 4011
Гродзинский 4143 **К**
Гропелло 4141
Грунский 3996 **РЕЦ**
Гу Чао-хао 4161
Гудстейн 3948 **РЕЦ**
Гутьеррес-Новоа 4092

Д

Дайсон 4100
Далениус 4112, 4114
Данскин 4121
Дег 4044
Дессулави 4122
Деш 4268 **П**
Джарвис 4251
Джона 4074 **РЕЦ**
Диккинсон 4264 **П**
Динкуляну 3977
Дородницын 4187
Досс 4002
Доу 4023
Дуб 4099
Дюфренуа 3956

Е

Егер 4041
Ельшин М. И. 4005
Енсен 4103
Ефимов Н. В. 4178

Ж

Жан 4019
Жаутыков О. А. 3939

З

Заславский И. Д. 3983
Захидов Т. З. 3936
Зелинка 3941
Зентграф 4270 **П**
Зигель 4083

И

Ишлинский А. Ю. 4030

К

Каземир 3947
Кале 4199
Калицин 4165
Камке 3929, 3932 **РЕЦ**
Камынин Л. И. 3999
Кантер 4081
Карлиц 4065
Карльсен 4224
Карнап 4096
Кассина 3937
Кауфман 4215, 4216
Кац 3989
Келлер 4017
Кемень 4027
Керри 3948 **РЕЦ**
Килберн 4208
Кирххофф 3965
Клейн 4126
Клейнвехтер 4048
Клейнман 4083
Кнастер 3974
Кнопп 3997 **РЕЦ**
Коберн 4036
Кобленз 4242
Коггешалл 4274
Кольрю 4142 **К**
Кон-Фоссен С. 4180
Копець 4093
Коринальдези 4050
Корт 4144
Крамес 4147 **РЕЦ**
Крейг 4117
Крейн М. Г. 4089
Крейн С. Г. 4035
Крейсел 3946
Кригер 4088
Криккеберг 3985
Криспин 4083
Кролл 4189
Кром 4269 **П**
Крофорд 4135 **РЕЦ**
Кузнецов В. Н. 4047
Кузнецов П. И. 4124
Кулаков В. А. 4259 **К**
Куликов Д. К. 4196
Купер 4204
Кучинский 4229

Л

Лакс 4010
Латиль 4262 **РЕЦ**
ЛеВек 3955
Леви 4189
Лейн 4172
Леонов М. Я. 4053
Линник Ю. В. 3938
Лихнерович 4168 **К**
Лоде 4185
Лозинский С. М. 4001
Лорант 4231
Лоренц 3990 **К**
Лузин Н. Н. 4066 **К**, 4067 **К**
Лурсманашвили А. П. 3958
Людовико 4141
Льюк 4240

М

Майхилл 3944
Мак-Гуайр 4198
Мак-Крей 4134 **К**
Мак-Лахлан Н. В. 4086 **К**
Манд 4000

Манделбройт 3931
Маневич Д. В. 4102
Маннебак 4253
Манфреди 4043
Маргенау 4073 **РЕЦ**
Мартинес 4273
Марчевский 3981
Масс 3968 **РЕЦ**
Мей 4062
Мейер 4082
Мейер-Кёниг 4079
Мердок 3989
Меснер 4265 **П**
Мёрфи 4073 **РЕЦ**
Микусинский 3970
Милстон 4218
Митрович 4024
Митчелл 4181
Миядзаки 4040
Мозер 4006
Моисеев Н. Н. 4186
Моссаковский В. И. 4029
Мостовский 3943, 3945
Моуфанг 4146 **РЕЦ**
Мун 4015, 4046
Мур 4273
Мысовских И. П. 4183
Мюллер 4136
Мюллер 4031

Н

Надь 4094 **РЕЦ**
Найт 4152
Наср 4002
Нейман 4118
Никитин А. К. 4020
Никол 3953
Ниче 4176
Новак 3941
Новиков А. С. 4127 **К**
Номидзу 4160

О

Оксфорд 4275
Олуэй 4206
Оман 4179
Орд 4208
Оуэн 4108
Оуэнс 4242

П

Пайу 4028
Парсегян 4272
Паршад 4210
Пейеримхофф 3987
Пентковский М. В. 4200 **К**
Петер 4137
Петерс 4075 **РЕЦ**
Петров А. А. 4120 **Д**
Пизо 3956
Пилатовский В. П. 4033
Пирси 4202, 4203
Пирсон 4045
Погорелов А. В. 4177
Пост 4254
Прокоп 4076 **РЕЦ**
Прянишникова З. И. 4150 **Д**
Пятецкий-Шапиро И. И. 3951

Р

Раик А. Е. 3933
Райхман 4265 **П**
Раковецкий 4064
Ранкин 3957
Рашидов Х. 4106 **Д**
Рей Пастор 4072 **РЕЦ**
Рейчингер 4249
Реллих 4094 **РЕЦ**
Риге 3972
Рисс 4094 **РЕЦ**
Ричардсон 4217
Робинсон 4273
Розе 4146 **РЕЦ**
Розенберг 4265 **П**
Розенберг М. Д. 4032
Рорбах 3950
Рорберг 4075 **РЕЦ**
Россини 4140
Росье 4151, 4171
Румер Ю. Б. 4164
Рюссо 4262 **РЕЦ**
Рылл-Нардзевский 3981

С

Сагар 4210
Саморуков Б. Н. 4155
Сантало 4174 **К**
Сасаки 4169
Сегё 3989
Серрелл 4263 **П**
Сигалов А. Г. 4059
Сикорский 3971
Сил 4111
Скорца-Драгони 3982
Скотт 4118
Скотт 4021
Смит 4119 **К**
Смит 4209
Смолли 4277
Соменци 4141
Спенсер 4015, 4046
Стоун 3975
Стоун 4090
Стратонович Р. Л. 4124
Стройк 4145 **К**
Стюартсон 4037
Су Бу-цин 4161, 4162
Суворов И. Ф. 4068 **К**
Сёкефалви Надь (см. Надь)
Ся Дао-син 3994

Т

Такано 4128
Таланов Д. И. 3993
Тарасов Н. П. 4071 **К**
Тасный-Часный 4194
Тауэр 4273
Тёрнер 4211
Тимпе 4078 **РЕЦ**
Тихонов В. И. 4124
Томас 4070 **К**
Топпинг 3997 **РЕЦ**
Торре 4138
Туганов Н. Г. 4157

У

Уайдьюл 4211
Уайтхед 3979
Уитли 4245
Ульрих 3998 **РЕЦ**
Унгер 4173
Уолш 3998 **РЕЦ**
Уотсон 3930
Урмаев Н. А. 4087
Уэцел 4240

Ф

Фари 3980
Фейеш Тот 4131, 4132
Фелпс 4264 **П**
Фельберг Е. 4188
Фет 4061
Фиггинс 4207
Фишл 4198
Фогель 4252
Фойгт 4077 **РЕЦ**
Фолькман 3950
Фортуна 4258
Фрай 4074 **РЕЦ**
Фрёйд 3986
Фью 3959

Х

Хайнс 4026
Халдеев И. М. 4149 **Д**
Хаммерсли 4190
Хантер 4083
Харвуд 4123
Хартли 4261 **РЕЦ**
Хартман 3954
Хартри 4260 **РЕЦ**
Хасимото 4038, 4039
Хаупт 4239
Хаяси 4007
Хербек 4042
Хёфингер 4074 **РЕЦ**
Хикс 4211
Хилл 4250
Хилл 4244
Хилл 4202, 4203
Хилле 4009
Холл 3960
Холл 3961
Хофрейтер 4078 **РЕЦ**
Хуан Су-шу 4054, 4055, 4056

Ц

Цаматтио 4141
Целлер 4079
Цзао Цзя-гуй 4107
Цурмюль 4075 **РЕЦ**
Цыганков И. В. 4153, 4154

Ч

Чеймберлин 3964
Четаев Н. Г. 4025

Ш

Шанин Н. А. 3938
Шапиро 3988
Шевалье 3940
Шейн 4118
Шерк 4172
Шерман Д. И. 4013
Шефке 4008
Шиманов С. Н. 4004
Шмид 4076 **РЕЦ**
Шнелл 4135 **РЕЦ**
Шрёдер 4191
Штегмюллер 4097
Штифель 4195
Шултхейсс 4023
Шютте 4133

Э

Эйдес И. Г. 4259 **К**
Эймикс 4273
Эйслер 4236
Эйуб 3949
Эйхлер 3968 **РЕЦ**
Эпстейн 4107
Эрс 4074 **РЕЦ**
Эрселл 4034
Эрхарт 4130
Эст 3976

Ю

Юдицкий М. М. 4148 **Д**
Юркат 3987

Я

Ямамото 3963
Ямамото 4105
Ястремский Б. 4115

A

Abdelhay J. 4069 **К**
Adam A. 4098
Agarwal R. P. 4084
Allen F. B. 4135 **РЕЦ**
Alway G. G. 4206
Amble O. 4192
Amyx J. W. 4273
Antosiewicz H. A. 4190
Armitage P. 4104
Aruffo G. 4129
Ayoub R. G. 3949
Ayres W. L. 4074 **РЕЦ**

B

Baier 4147 **РЕЦ**
Bailey Ch. E. G. 4279 **П**
Bandyopadhyay G. 4163

Baudoux P. 4016
Becker A. 4077 **РЕЦ**
Beckert H. 4052
Beckmann P. 4080
Behrens D. J. 4193
Bergdal Ed. 3935
Bergfors C. A. 4264 **П**
Bergman S. 3996 **РЕЦ**
Bertolini F. 4060
Besnard M. 4199
Binet F. E. 4109
Blachman N. M. 4125
Blambert M. 3991, 3992
Blanuša D. 4158, 4159
Blaschke W. 3932 **РЕЦ**
Boinet J. 3962
Bol G. 4156
Borsuk K. 3973, 3978
Bose S. N. 4166
Bouligand G. 4072 **РЕЦ**, 4262 **РЕЦ**
Bowie H. E. 3934
Brafman F. 4085
Browder F. 4012
Brown H. E. 4209

C

Calais R. 4199
Carlitz L. 4065
Carnap R. 4096
Cassina U. 3937
Chamberlin E. 3964
Chevalier A. 3940
Coblenz A. 4242
Coburn N. 4036
Coggeshall I. S. 4274
Colerus E. 4142 **К**
Cooper B. F. C. 4204
Corinaldesi E. 4050
Court N. A. 4144
Craig C. C. 4117
Crawford M. G. 4135 **РЕЦ**
Crispin J. W. 4083
Curry H. B. 3948 **РЕЦ**

D

Dalenius T. 4112, 4114
Danskin J. M. 4121
Deeg E. 4044
Desch J. R. 4268 **П**
Dessoulavy R. 4122
Dickinson A. H. 4264 **П**
Dinculeanu N. 3977
Doob J. L. 4099
Dorodnicyn A. A. 4187
Doss Sh. 4002
Dufresnoy J. 3956
Dyson F. J. 4100

E

Ehrhart E. 4130
Eichler M. 3968 **РЕЦ**
Eisler P. 4236
Epstein B. 4107
Est W. T. van 3976

F

Fary I. 3980
Fejes Tóth L. 4131, 4132
Fet A. I. 4061
Few L. 3959
Figgins R. W. 4207
Fischl C. F. 4198
Fortuna T. 4258
Freud G. 3986
Fry C. G. 4074 **РЕЦ**

G

Gassan A. 4255
Gere B. H. 4074 **РЕЦ**
Gillman L. 4121
Ginsburg S. 4091
Godeaux L. 4146 **РЕЦ**
Goodstein R. L. 3948 **РЕЦ**
Gorn S. 4139
Graf U. 4077 **РЕЦ**
Green J. W. 4011
Grodzinski P. 4143 **К**
Gropello G. di 4141
Grunsky 3996 **РЕЦ**
Gurgel J. A. A. 4197
Guthrie R. K. 4273
Gutiérrez Novoa L. 4092
Guttman L. 4113

H

Hall J. S. 3961
Hall M., Jr. 3960
Halphen É. 4063
Hammersley J. M. 4190
Hartley H. O. 4261 **РЕЦ**
Hartman S. 3954
Hartree D. R. 4260 **РЕЦ**
Harwood E. H. 4123
Hasimoto Z. 4038, 4039
Haupt F. J. 4239
Hayashi Ch. 4007
Henderson C. R. 4116
Henderson F. E. 4243
Herbeck M. 4042
Hicks B. L. 4211
Hill A. J. 4250
Hill B. 4244
Hill G. W. 4202, 4203
Hille E. 4009
Hines C. O. 4026
Hofreiter N. 4078 **РЕЦ**
Höfiner E. 4074 **РЕЦ**
Huang Su-Shu 4054, 4055, 4056
Hunter H. E. 4083

J

Jaeger J. C. 4041
Jarvis K. 4251
Jean P. 4019
Jensen A. 4103
Jonah H. F. S. 4074 **РЕЦ**
Jurkat W. 3987

K

Kac M. 3989
Kalitzin N. St. 4165
Kamke 3929, 3932 **РЕЦ**
Kanter L. H. 4081
Karlsen G. 4224
Kaufman S. 4215, 4216
Kazemier B. H. 3947
Keller J. B. 4017
Kemény J. 4027
Kilburn T. 4208
Kirchhoff A. 3965
Klein G. 4126
Kleinman R. E. 4083
Kleinwächter H. 4048
Knaster B. 3974
Knight A. J. 4152
Knopp K. 3997 **РЕЦ**
Kopeć J. 4093
Krames J. L. 4147 **РЕЦ**
Kreisel G. 3946
Krickeberg K. 3985
Krieger R. 4088
Kroll W. D. 4189
Krom M. E. 4269 **П**
Kuchinsky S. 4229

L

Lane N. D. 4172
Latil P. de 4262 **РЕЦ**
Laudet M. 4185
Lax P. D. 4010
LeVeque W. J. 3955
Levy S. 4189
Lichnerowicz A. 4168 **К**
Lorant M. 4231
Lorentz G. G. 3990 **К**
Ludovico M. 4141
Lueck L. B. 4240

M

Maass H. 3968 **РЕЦ**
McCrea W. H. 4134 **К**
McGuire J. H. 4198
Mandelbrojt S. 3931
Manfredi B. 4043
Manneback Ch. 4253
Marczewski E. 3981
Margenau H. 4073 **РЕЦ**
Martinez R. 4273
May K. O. 4062
Meijer C. S. 4082
Mendes M. 4000
Mesner M. H. 4265 **П**
Meyer-König W. 4079
Mikusiński J. 3970
Millstone S. D. 4218
Mitchell A. R. 4181
Mitrović D. 4024
Miyazaki M. 4040
Moon P. 4015, 4046
Moore A. M. 4273
Moser J. 4006
Mostowski A. 3943, 3945
Moufang R. 4146 **РЕЦ**
Murdock W. L. 3989
Murphy M. G. 4073 **РЕЦ**
Müller C. Th. 4136
Müller W. 4031
Myhill J. 3944

N

Nasr S. K. 4002
Neyman J. 4118
Nicol Ch. A. 3953
Nitsche J. 4176
Nomizu K. 4160
Novák J. 3941

O

Ohmann D. 4179
Ord G. 4208
Owen D. B. 4108
Owens H. L. 4242
Oxford A. J. 4275

P

Pailloux H. 4028
Parsegian V. L. 4272
Parshad R. 4210
Pearcey T. 4202, 4203
Pearson J. D. 4045
Peter H. 4137
Peters 4075 **РЕЦ**
Peyerimhoff A. 3987
Phelps B. E. 4264 **П**
Pisot Ch. 3956
Post G. 4254
Prokop W. 4076 **РЕЦ**

R

Rachinger W. A. 4249
Rajchman J. A. 4265 **П**
Rakowiecki T. 4064
Rankin R. A. 3957
Rellich 4094 **РЕЦ**
Rey Pastor J. 4072 **РЕЦ**
Richardson J. E. 4217
Riesz F. 4094 **РЕЦ**
Riguet J. 3972
Robinson W. M. 4273
Rohrbach H. 3950
Rohrberg 4075 **РЕЦ**
Rosenberg M. 4265 **П**
Rossier P. 4151, 4171
Rossini A. 4140
Rozet O. 4146 **РЕЦ**
Russo F. 4262 **РЕЦ**
Ryll-Nardzewski C. 3981

S

Sagar A. 4210
Santaló L. A. 4174 **К**
Sasaki U. 4169
Schäfke F. W. 4008
Scherk P. 4172
Schmid O. 4076 **РЕЦ**
Schnell L. H. 4135 **РЕЦ**
Schröder J. 4191
Schultheiss P. M. 4023
Schütte K. 4133
Scorza Dragoni G. 3982
Scott E. L. 4118
Scott N. R. 4021
Seal K. C. 4111
Serrell R. 4263 **П**
Shane C. D. 4118
Shapiro V. L. 3988
Siegel K. M. 4083
Sikorski R. 3971
Smalley M. N. 4277
Smith E. S. 4119 **К**
Smith S. T. 4209

Somenzi V. 4141
Spencer D. E. 4015, 4046
Stegmüller W. 4097
Stewartson K. 4037
Stiefel E. 4195
Stone A. H. 3975
Stone M. H. 4090
Struik D. J. 4145 **К**
Szegö G. 3989
Sz.-Nagy B. 4094 **РЕЦ**

T

Takano Y. 4128
Tasny-Tschiassny L. 4194
Thomas, G. B., Jr. 4070 **К**
Timpe A. 4078 **РЕЦ**
Topping J. 3997 **РЕЦ**
Torre C. 4138
Tou J. 4023
Tower J. R. 4273
Tsao Chia Kuei 4107
Turner T. E. 4211

U

Ullrich E. 3998 **РЕЦ**
Unger G. 4173
Ursell F. 4034

V

Van Dantzig D. 4101
Van der Waerden B. L. 4133
Vivier M. 3966, 3967
Vogel Th. 4252
Voigt H. 4077 **РЕЦ**
Volkmann B. 3950
Vrănceanu G. 4167
Vyčichlo Fr. 3941

W

Wallmark J. T. 4267 **П**
Walsh J. L. 3998 **РЕЦ**
Watson B. B. 3930
Weirich H. 4018
Wetzel W. W. 4240
Wetzger J. 4049
Wheatley B. M. 4245
Whitehead G. W. 3979
Widule W. W. 4211
Wijngaarden A. van 3952
Wijsman R. A. 4057
Winterfeldt A. F. 4271 **П**
Wintner A. 4170
Wolfe J. 3964
Woods L. C. 4182

Y

Yamamoto K. 3963
Yamamoto T. 4105

Z

Zammattio C. 4141
Zelinka R. 3941
Zeller K. 4079
Zentgraf J. A. 4270**П**
Zurmühl R. 4075 **РЕЦ**

夏道行 3994
蘇步青 4161, 4262
谷超豪 4161

ПОПРАВКА

На стр. 9 заголовок в левой колонке следует читать:
«Многочлены и линейная алгебра»

Технические редакторы *К. И. Игнаткова* и *Т. М. Морозова*